ÜBER REIHENENTWICKELUNGEN ANALYTISCHER FUNKTIONEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT (II. SEKTION)
DER K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU MÜNCHEN
AM 20. APRIL 1902
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

GEORG FABER,
ASSISTENT A. D. TECHNISCHEN HOCHSCHULE MÜNCHEN.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1903.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0173

HERRN

PROFESSOR DR. ALFRED PRINGSHEIM

IN DANKBARER VEREHRUNG GEWIDMET.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

I. Abschnitt: Über Entwickelungen der Form $\sum a_\nu (\psi(x))^\nu$.

§ 1. Herstellung derartiger Entwickelungen für einfach zusammenhängende Bereiche S 9

§ 2. Excurs über die zum Rande von S gehörigen Fundamentalfunktionen der Gleichung $\Delta u = 0$ 12

§ 3. Übertragung der Entwickelungen des § 1 auf mehrfach zusammenhängende Bereiche 14

§ 4. Zusammenhang mit der Theorie der analytischen Fortsetzung . . 15

§ 5. Über Reihen der Form $\sum \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt\, x^\nu$ 21

II. Abschnitt: Weitere Beispiele zur Theorie der analytischen Fortsetzung.

§ 1. Über Reihen der Form $\sum \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) x^\nu$ 26

§ 2. Über Reihen der Form $\sum G(\nu) x^\nu$ (G = ganze Funktion; $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$) 31

§ 3. Über Reihen der Form $\sum a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu\, dt\, x^\nu$ 38

III. Abschnitt: Über polynomische Entwickelungen.

§ 1. Definition und Eigenschaften gewisser Polynome $P_\nu(x)$ 48

§ 2. Über Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ 53

Beispiele 58

§ 3. Verallgemeinerungen 62

Einleitung.

Entwickelt man eine eindeutige analytische Funktion $F(x)$ in eine nach gewissen Funktionen (Potenzen, Legendreschen Polynomen etc.) fortschreitende Reihe, so wird diese im allgemeinen die Funktion nicht vollständig in ihrem ganzen Existenzbereiche darstellen, sondern nur in einem gewissen Bezirke, der jedenfalls nicht größer ist als das Konvergenzgebiet der Reihe, eventuell auch nur einen Teil desselben umfaßt; es machen sich eben in der Reihe für $F(x)$ außer den Singularitäten von $F(x)$ unter Umständen noch diejenigen der entwickelnden Funktionen bemerkbar.

Andrerseits wird man — zunächst bei eindeutigen Funktionen $F(x)$ — mit Vorliebe nach solchen Entwickelungen oder arithmetischen Darstellungen fragen, welche die gegebene Funktion $F(x)$ ihrer *ganzen Ausdehnung* nach in einen *einzigen* lediglich aus rationalen Operationen zusammengesetzten Ausdruck zusammenfassen*). Denn eine solche Art der Darstellung ermöglicht, abgesehen von der Vereinfachung der numerischen Berechnung, welche durch sie oft geboten sein mag, gewöhnlich einen leichteren Überblick über die Eigenschaften (Nullstellen, Singularitäten etc.) der Funktion; ja sehr häufig wird der Existenzbeweis für ausgedehnte Klassen von Funktionen nur dadurch zu erbringen sein, daß man für diese Funktionen Darstellungen der eben charakterisierten Art findet; ein klassisches Beispiel hierfür ist das Mittag-Lefflersche Theorem.

Bei eindeutigen Funktionen mit der einen wesentlich singulären Stelle ∞ liefert sowohl die überall konvergente Potenzreihe, als auch die Weierstraßsche Produktentwickelung einen Ausdruck der verlangten Art; bei beiden Entwickelungsarten stimmen die singulären Stellen der entwickelnden Funktionen, nämlich die Pole der Potenzen und die möglicherweise wesentlich singulären Stellen der Primfaktoren, mit der einzigen

*) Dieses Problem ist sehr nahe verwandt mit demjenigen, das Weierstraß (Werke I, p. 83) so formuliert: ob es möglich sei, arithmetische aus der Veränderlichen x und aus unbestimmten Koeffizienten zusammengesetzte Ausdrücke zu bilden, welche sämtliche Funktionen einer bestimmten Klasse — und nur diese — darstellen. Zwei Funktionen F_1 und F_2 heißen dabei zu derselben Klasse gehörig, wenn der Bereich, wo F_1 sich verhält wie eine *rationale* Funktion, übereinstimmt mit dem Bereiche, wo F_2 sich verhält wie eine rationale Funktion.

singulären Stelle der ganzen transcendenten Funktion überein. Zu den schönsten Sätzen der neueren Funktionentheorie gehören diejenigen, welche französische Mathematiker (besonders die Herren Poincaré und Hadamard) über die Wechselbeziehungen zwischen diesen beiden Entwickelungen gefunden haben.

Eine Potenzreihe mit *endlichem* Konvergenzradius wird der obigen Forderung, die Funktion ihrer ganzen Ausdehnung nach darzustellen, nur dann genügen, wenn der Konvergenzkreis die natürliche Grenze der Funktion ist. Eine Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ ist also die naturgemäße Darstellungsform für solche Funktionen, die überhaupt nur in einem Kreise mit dem Radius $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}}$ existieren. Dies spricht sich auch darin aus, daß bei „willkürlicher Annahme“ der a_ν, wenn nur $\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}} = r > 0$ ist, die Funktion $\sum a_\nu x^\nu$ alle Male nicht über ihrem Konvergenzkreis fortsetzbar ist.

Ist der Existenzbereich einer Funktion nicht ein Kreis, sondern etwa das von irgend einer andern geschlossenen Kurve begrenzte Gebiet, so findet man ebenfalls Entwickelungen, welche gerade in jenem Gebiete konvergieren und die betreffende Funktion darstellen, und zwar kommen hier zunächst zwei Arten der Entwickelung in Betracht, welche beide Verallgemeinerungen der Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ sind, nur daß jedesmal ein andres Merkmal der letzteren festgehalten wird; nämlich:

1) Potenzreihen $\sum a_\nu (\psi(x))^\nu$, wo $\psi(x)$ im allgemeinen eine transcendente Funktion sein wird;
2) polynomische Entwickelungen.

Auf die unter 1) genannten Entwickelungen gehe ich im I. Abschnitte dieser Arbeit näher ein; naturgemäß spielen hier Fragen aus der Theorie der analytischen Fortsetzung herein, von denen ein Teil im II. Abschnitte weiter behandelt wird. Der III. Abschnitt ist den polynomischen Entwickelungen gewidmet. Fast überall beschränke ich mich auf Gebiete, welche die Ebene nur einmal überdecken; doch lassen sich viele der angegebenen Entwickelungen, besonders auch des III. Abschnittes, übertragen auf Funktionen, die auf einer algebraisch verzweigten Riemannschen Fläche eindeutig sind; den Entwickelungen nach Polynomen entsprechen dort z. B. Entwickelungen nach solchen rationalen Funktionen der Fläche, die nur in einem Punkte unendlich werden. Auf diese Theorie, deren Hauptpunkte sich teils explicite, teils implicite schon in den Weierstraßschen Vorlesungen über Abelsche Funktionen finden, werde ich vielleicht bei späterer Gelegenheit zurückkommen.

I. Abschnitt.

Über Entwickelungen der Form $\sum a_\nu (\psi(x))^\nu$.

§ 1.

Die analytische Funktion $F(x)$ sei regulär in dem einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Gebiete S, das von der beliebig*) gegebenen Kurve C begrenzt sei.

Angenommen, ich kenne eine Funktion $\psi(z)$ von folgenden Eigenschaften:

1) $\psi(z)$ ist regulär im Innern des Gebietes S;

2) wenn z_1 und z_2 zwei nicht zusammenfallende Punkte von S sind, so ist $\psi(z_1) \neq \psi(z_2)$;

dann wird die Funktion von z: $\dfrac{F(z)}{\psi(z) - \psi(x)}\,\psi'(z)$, in dem betrachteten Gebiete nur an der Stelle $z = x$ unendlich und hat daselbst das Residuum $F(x)$; man hat daher nach dem Cauchyschen Satze:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(z)}{\psi(z) - \psi(x)}\,\psi'(z)\,dz,$$

wo die Integration über eine ganz im Innern von C verlaufende, aber den Punkt x umschließende Kurve C' zu erstrecken ist.

Ich mache nun die weitere Voraussetzung, daß $\psi(z)$ noch folgende (dritte) Eigenschaft besitzt

3) auf C ist $|\psi(z)|$ konstant $= r$, innerhalb S kleiner als r.

Zieht man eine ganz im Innern von S verlaufende geschlossene Kurve C'', so kann man immer noch zwischen C'' und C eine Kurve C' so nahe an C ziehen, daß das Maximum von $|\psi(z)|$ auf C'' kleiner ist als das Minimum von $|\psi(z)|$ auf C'. Dann gilt gleichmäßig für alle x innerhalb und auf C'' und für alle z auf C':

$$\frac{1}{\psi(z) - \psi(x)} = \frac{1}{\psi(z)} + \frac{\psi(x)}{(\psi(z))^2} + \frac{(\psi(x))^2}{(\psi(z))^3} + \cdots,$$

*) Wenn von einer „beliebigen" Kurve die Rede ist, so sei dabei ein für alle mal vorausgesetzt, daß dieselbe die nötigen Stetigkeitseigenschaften besitzt, welche bei Lösung des sog. Dirichletschen Problems erforderlich sind.

daher auch für alle x innerhalb und auf C'':

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu (\psi(x))^\nu,$$

(I) *)

wo $$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{F(z)}{(\psi(z))^{\nu+1}} \psi'(z)\, dz \quad \text{ist.}$$

Da man die Kurve C'' der C beliebig nähern darf, und da die Werte für die Koeffizienten a_ν unabhängig sind von der speziellen Wahl der Kurve C', so gilt die obige Entwickelung für alle Punkte x im Innern von S.

Nun aber kann man, wenn die Kurve C beliebig vorgegeben ist, nach dem Riemannschen Fundamentalsatz über konforme Abbildung stets eine den Bedingungen (1) bis (3) genügende Funktion $\psi(z)$ bilden, man erhält daher den Satz:

Eine innerhalb eines einfach zusammenhängenden ganz im Endlichen gelegenen Gebietes S reguläre Funktion $F(x)$ läßt sich stets in demselben durch eine konvergente Entwickelung darstellen von der Form:

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a_\nu (\psi(x))^\nu.$$

Bedeutet G das Maximum von $|F(z)\,\psi'(z)|$, g das Minimum von $|\psi(z)|$ auf C' und L die Länge dieser Kurve, so folgt aus der Koeffizientendarstellung in (I):

$$|a_\nu| < \frac{GL}{2\pi \cdot g} \cdot \frac{1}{g^\nu},$$

und hieraus ergibt sich, da sich g von r beliebig wenig unterscheidet, wenn nur C' nahe genug an C verläuft:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leqq \frac{1}{r} \text{ **}).$$

---

*) Die im vorstehenden benutzte Methode rührt im wesentlichen schon von Puiseux her (Journ de Math., t. 15 (1850), p. 380). Weitere Ausführungen derselben findet man in Königsbergers „Vorl. über die Theorie der ellipt. Funkt." Teil I (1874), p. 93 ff.; insbesondere ist die im Texte unter (I) gegebene Entwickelung daselbst in der Formel (17) p. 103 enthalten. Neuerdings hat Herr E. Lindelöf (acta soc. fenn. 24 (1898)) wieder auf die prinzipielle Bedeutung derartiger Entwickelungen aufmerksam gemacht und dieselbe durch vielfache Anwendungen beleuchtet. Vgl. auch Picard, traité d'an. II, p. 288; Pringsheim, Math. Ann. 50 (1898).

**) Die Möglichkeit, daß hier das Zeichen $<$ stehen kann, ist einer der wesentlichen Unterschiede zwischen den Reihen $\sum a_\nu (\psi(x))^\nu$ und der gewöhnlichen Taylorschen Reihe $\sum a_\nu x^\nu$; unter welchen Umständen diese Möglichkeit wirklich eintritt, bleibt hier unerörtert.

Auch umgekehrt folgt leicht aus dem Weierstraßschen Doppelreihensatze, daß eine Reihe $\sum a_\nu(\psi(x))^\nu$, wo ψ die den Bedingungen (1) bis (3) genügende Funktion bedeutet und $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leqq \frac{1}{r}$ ist, stets eine innerhalb S reguläre analytische Funktion darstellt. Sind die a_ν abgesehen von der erfüllten Bedingung $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} \leqq \frac{1}{r}$ willkürliche von einander unabhängige Größen, so ist die gewöhnliche Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ bekanntlich über den Kreis mit dem Radius r hinaus nicht fortsetzbar. Es fragt sich, ob dann auch die Kurve C die natürliche Grenze der analytischen Funktion $\sum a_\nu(\psi(x))^\nu$ bildet. Dies ist immer der Fall, wenn C aus einer endlichen Anzahl regulärer analytischer Kurvenstücke zusammengesetzt ist.*) Denn wäre in diesem Falle die Funktion $\sum a_\nu(\psi(x))^\nu$ über C hinaus fortsetzbar, so läßt sich unschwer zeigen, daß dann auch die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ über den Kreis mit dem Radius r hinaus fortsetzbar wäre.

Die Reihen $\sum a_\nu(\psi x)^\nu$ sind auch insofern bemerkenswert, als sie unter Umständen sehr einfache Typen arithmetischer Ausdrücke liefern, die in getrennten Konvergenzbezirken verschiedene analytische Funktionen darstellen; es erhellt dies am besten aus einem einfachen Beispiel:

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sum_1^\infty \binom{\frac{1}{2}}{\nu}(4x(x+1))^\nu \left(=\frac{1}{2}\sqrt{1+4x(x+1)}-\frac{1}{2}\right)$$

konvergiert in der Umgebung des Punktes $x=0$ nach x; dagegen in der Umgebung des Punktes $x=-1$ nach $-1-x$.

Noch greifbarer tritt dieser Unterschied zu Tage, wenn für $\psi(x)$ eine periodische Funktion gewählt wird.

---

*) Die Definition der Ausdrücke „analytische Kurve“ und „regulärer Bogen“ findet sich u. a. in Picards traité d'an., t. II, chap. II, 2; diesem Kapitel (s. bes. §§ 4 und 7) entnehme man auch den Beweis des folgenden von Herrn Schwarz herrührenden Satzes, der bei dem Nachweis des obigen Satzes zu benutzen ist, und auf den in der vorliegenden Arbeit noch mehrmals Bezug genommen wird: Die Funktion $\psi(z)$, welche ein Gebiet, zu dessen Begrenzung das reguläre analytische Kurvenstück C gehört, auf einen Kreis abbildet, ist regulären Verhaltens und umkehrbar in allen innern Punkten von C. (Vgl. auch den dem obigen Satz analogen im III. Abschn. p. 56/57, wo der entsprechende Beweis durchgeführt ist).

§ 2.

Ich schalte nun einen Paragraphen ein, in welchem auf die Bedeutung des reellen und des imaginären Teils der Funktionen $(\psi(x))^\nu$ für die Theorie der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ hingewiesen werden soll*). Es werde

$$x' = \psi(x) = \xi' + i\eta' = r'(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')$$

und

$$x = \xi + i\eta = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

gesetzt. r' und ϑ' sind bestimmte Funktionen von ξ und η.

Die Kurve C der x-Ebene, welcher in der x'-Ebene der Kreis $r' = 1$ entsprechen möge, sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$\xi = \xi(s),$$
$$\eta = \eta(s).$$

$\xi(s)$ und $\eta(s)$ seien periodische Funktionen von s mit der Periode 1, und s $(0 \leqq s \leqq 1)$ bedeute die Bogenlänge der Kurve C, wobei das x-Abbild des Punktes $x' = 1$ zum Anfangspunkt der Zählung genommen werde. Der Parameter s $(0 \leqq s \leqq 1)$ ist eine eindeutige Funktion des Arguments ϑ' des Einheitskreises in der x-Ebene $(0 \leqq \vartheta' \leqq 2\pi)$, und umgekehrt:

$$s = s(\vartheta'),$$
$$\vartheta' = \pi \cdot f(s).$$

Ist nun auf der Kurve C eine Belegung $\chi(s)$ gegeben, die, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, als abteilungsweise monoton angenommen werde, so geht, wenn man s als ganze Funktion von ϑ' ausdrückt, $\chi(s)$ über in eine Funktion $\chi_1(\vartheta')$, die ebenfalls abteilungsweise monoton ist. Man hat daher für $\chi_1(\vartheta')$ die Fouriersche Reihe:

$$\chi_1(\vartheta') = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_1^\infty{}_\nu(\gamma_\nu \cos\nu\vartheta' + \beta_\nu \sin\nu\vartheta'),$$

$$\gamma_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_1(\vartheta)\cos\nu\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\beta_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_1(\vartheta)\sin\nu\vartheta\, d\vartheta.$$

Ferner setze man

$$\Phi(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\gamma_0 + \sum_1^\infty{}_\nu r'^\nu(\gamma_\nu \cos\nu\vartheta' + \beta_\nu \sin\nu\vartheta'),$$

*) Ähnliche Bemerkungen ließen sich auch im III. Abschnitte bezüglich des reellen und des imaginären Teils der dort vorkommenden Polynome $P_\nu(x)$ machen.

wobei man für r' und ϑ' auf der rechten Seite deren Werte in ξ und η eingesetzt zu denken hat.

Nach bekannten Sätzen genügt $\Phi(\xi, \eta)$ im Gebiete S (innerhalb C) der Differentialgleichung:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\eta^2} = 0.$$

Auf der Kurve $C(r'(\xi, \eta) = 1)$ nimmt Φ die gegebenen Randwerte $\chi(s)$ an.

Zur Abkürzung setze man noch:

$$r'^{\nu} \cos \nu\vartheta' = \varphi_{2\nu}(\xi, \eta),$$
$$r'^{\nu} \sin \nu\vartheta' = \varphi_{2\nu+1}(\xi, \eta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Die φ_ν heißen nach den Herren Poincaré und Le Roy die zu der Kurve C gehörigen Fundamentalfunktionen der Gleichung $\Delta u = 0$, sie leisten folgendes:

Sind auf der Kurve C irgend welche abteilungsweise monotone Randwerte $\chi(s)$ vorgeschrieben, so läßt sich die Funktion $\Phi(\xi, \eta)$, welche im Innern des von C begrenzten Gebietes S der Gleichung

$$\Delta\Phi = 0$$

genügt und auf C die Randwerte $\chi(s)$ annimmt, entwickeln in eine Reihe der Form:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^\infty \alpha_\nu \varphi_\nu(\xi, \eta),$$

und es bestehen folgende Gleichungen:

$$\alpha_\nu = \int_0^1 \chi(s)\, \varphi_\nu(\xi(s), \eta(s))\, f'(s)\, ds,$$

$$\left.\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 \varphi_\nu(\xi(s), \eta(s))\, \varphi_k(\xi(s), \eta(s))\, f'(s)\, ds,$$

jenachdem $\nu \neq k$ oder $\nu = k$.

Man sieht, daß in der Ebene die Fundamentalfunktionen der Gleichung $\Delta u = 0$ vermöge der konformen Abbildung sich aus denjenigen des Kreises — $r^\nu \sin \nu\vartheta$ und $r^\nu \cos \nu\vartheta$ — durch eine sehr einfache und naheliegende Verallgemeinerung der Fourierschen Reihe ergeben. Im Raume liegen die Verhältnisse bedeutend komplizierter. Die Fundamentalfunktionen der Kugel sind die Laplaceschen Kugelfunktionen; die Fundamentalfunktionen für eine beliebige analytische Fläche hat Herr Le Roy aufgestellt und studiert*). Da im Raume kein so einfaches Hilfsmittel wie

*) Pariser thèse, abgedruckt in Ann. éc. norm. 15.

die konforme Abbildung zu Gebote steht, m. a. W. da beim Newtonschen Potentiale, sowie bei demjenigen höherer Räume ein konjugiertes Potential wie beim logarithmischen nicht existiert, so muß Herr Le Roy, um zu seinen Funktionen zu gelangen, die mannigfachsten Hilfsmittel der Funktionentheorie anwenden und kombinieren.

§ 3.

Bevor wir auf Anwendungen der unter (I) gegebenen Reihendarstellung eingehen, möge hier noch die entsprechende Verallgemeinerung der Laurentschen und ähnlicher Entwickelungen Platz finden.

Das ringförmige Gebiet S, das von einer geschlossenen Kurve C_1 und einer zweiten ganz innerhalb C_1 verlaufenden C_2 begrenzt wird, läßt sich nach Herrn Schottky*) konform auf einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreisring abbilden; d. h. es existiert eine Funktion $\psi(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) innerhalb des Ringes S ist $\psi(z)$ regulär und $\psi(z_1) \neq \psi(z_2)$, wenn $z_1 \neq z_2$;

2) auf C_1 ist $\psi(z)$ konstant $= r_1$, auf C_2 gleich r_2 $(< r_1)$.

Dann zeigt man ganz analog wie oben, daß sich jede innerhalb des Ringes S reguläre analytische Funktion $F(x)$ darstellen läßt durch eine Reihe:

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu (\psi(x))^\nu,$$

wo

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int F(z) (\psi(z))^{-\nu-1} \psi'(z)\, dz,$$

die Integration erstreckt über irgend eine in S verlaufende, C_2 umschließende geschlossene und sich selbst nicht durchsetzende Kurve.

Besteht das Regularitätsgebiet S einer Funktion $F(x)$ aus dem Innern einer Kurve C mit Ausnahme der von n im Innern von C verlaufenden einander ausschließenden Kurven $C_1, C_2, \cdots C_n$ begrenzten Gebiete, so läßt sich $F(x)$ folgendermaßen darstellen

$$F(x) = a_0 + \sum_1^\infty a_\nu (\psi(x))^\nu + \sum_1^\infty a_\nu^{(1)} \left(\frac{1}{\psi(x) - x_1}\right)^\nu + \cdots + \sum_1^\infty a_\nu^{(n)} \left(\frac{1}{\psi(x) - x_n}\right)^\nu **);$$

$\psi(z)$ ist hier diejenige Funktion, welche die konforme Abbildung des Gebietes S auf ein Gebiet S' leistet, das besteht aus dem Innern eines

*) Crelles Journ. 83 (1877), p. 326.

**) Vgl. Königsberger, a. a. O., p. 103, Formel (15).

um den Nullpunkt beschriebenen Kreises C' mit Ausschluß des Innern von n Kreisen $C_1', \cdots C_n'$, die resp. um die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_n$ beschrieben sind.

Daß eine solche Funktion $\psi(z)$ wirklich existiert, erscheint kaum zweifelhaft, obwohl mir ein strenger Nachweis nicht bekannt ist. Die Gebiete S und S' sind je vom Geschlechte $n\,(>1)$; es gehören also zu ihnen $(3n-3)$ Moduln, die im Falle der Möglichkeit der konformen Abbildung der beiden Gebiete auf einander für S' je die gleichen numerischen Werte haben müssen wie für S; die $n+1$ Kreise $C', C_1', \cdots C_n'$ hängen zunächst von $3n+3$ Konstanten ab ($2n+2$ Mittelpunktskoordinaten und $n+1$ Radien), davon sind aber sechs unwesentlich, da durch eine beliebige gebrochene lineare Substitution, die drei wesentliche komplexe, also sechs reelle Konstante enthält, die obigen Kreise wieder in solche übergehen; es stehen also für unser Gebiet S' $3n-3$ wesentliche Konstante zur Verfügung, und es bliebe zu beweisen, daß man stets durch Wahl dieser $3n-3$ Konstanten den $3n-3$ Moduln von S' vorgeschriebene Werte erteilen kann.

Die obigen Beispiele von Entwickelungsarten mögen genügen; es ist leicht einzusehen, wie sich die Darstellung gestaltet, wenn der Regularitätsbereich S irgend ein im Endlichen gelegenes Kontinuum ist mit einer endlichen Anzahl von Begrenzungskurven, und wie man zu verfahren hat, wenn der Punkt ∞ zum Regularitätsbereiche gehört, was wir bisher nicht in Betracht gezogen haben.

§ 4.

Die im Vorausgehenden abgeleiteten Sätze stehen in engster Beziehung zur Theorie der analytischen Fortsetzung und finden daselbst ihre fruchtbarste Anwendung. Es sei z. B. vorgelegt die Potenzreihe

$$F(x) = \sum a_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = 1,$$

und es sei zu untersuchen, ob die dadurch definierte Funktion über den Punkt $e^{\beta i}$ fortsetzbar ist, m. a. W. ob $e^{\beta i}$ ein singulärer Punkt für $F(x)$ ist oder nicht. Man wird dann eine aus einem einzigen regulären Zuge bestehende, ganz innerhalb des Einheitskreises verlaufende und denselben im Punkte $e^{\beta i}$ berührende geschlossene analytische Kurve C konstruieren; das endliche von dieser Kurve begrenzte Gebiet S möge durch die Funktion $x' = \psi(x)$ auf das Innere des Kreises $|x'| = r$ abgebildet werden; da die Kurve C als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt wurde, so folgt*), daß $\psi(z)$ auch innerhalb einer

*) s. die Fußnote p. 11.

die Kurve C, also auch den Punkt $e^{\beta i}$ umschließenden Kurve C' mit der Gleichung $|\psi(z)| = r + \varrho$ regulär ist.

Nach dem Satze (I) p. 10 läßt sich $F(x)$ in eine zunächst im Gebiete S gültige Reihe entwickeln:

$$F(x) = \sum a_\nu'(\psi(x))^\nu.$$

Ist nun der Punkt $e^{\beta i}$ kein singulärer, so läßt sich ein σ' $(0 < \varrho' \leqq \varrho)$ so bestimmen, daß $F(x)$ auch innerhalb der Kurve $|\psi(x)| = r + \varrho'$ regulär ist; dann aber stellt die Reihe $\sum a_\nu'(\psi(x))^\nu$ die Funktion $F(x)$ auch in diesem erweiterten Gebiete dar; und umgekehrt wenn $\sum a_\nu'(\psi(x))^\nu$ noch für $|\psi(x)| = r + \varrho'$ $(\varrho' > 0)$ konvergiert, so stellt die Reihe in dem Gebiete $|\psi(x)| < r + \varrho'$ eine analytische Funktion dar, die in S und $F(x)$ übereinstimmt. Die Reihe stellt also die analytische Funktion von $F(x)$ über $e^{\beta i}$ hinaus dar; letzterer Punkt kann folglich kein singulärer sein.

Die Entscheidung, ob ein Punkt $e^{\beta i}$ des Konvergenzkreises ein singulärer ist oder nicht, läuft also auf die Untersuchung hinaus, ob die oben gebildete Reihe $\sum a_\nu'(\psi(x))^\nu$ nur für $|\psi(x)| < r$ oder auch für $|\psi(x)| < r + \varrho'$ konvergiert, d. h. ob $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{r}$ oder $< \frac{1}{r}$ ist.

Als Funktion $\psi(z)$ benutzte man bisher sowohl bei der Definition der analytischen Fortsetzung als bei den meisten theoretischen Untersuchungen über dieselbe die Funktion $z - z_1$, wo z_1 ein Punkt auf der Geraden $0 \cdots e^{\beta i}$ ist; die Kurve C ist dann ein Kreis um z_1. Die a_ν' sind in diesem Falle insofern komplizierte Funktionen der Koeffizienten a_ν der ursprünglichen Reihe $\sum a_\nu x^\nu$, als jedes a_n' von unendlich vielen der a_ν, nämlich von $a_n, a_{n+1}, \cdots$ in inf. abhängt. Es ist dann wichtig zu zeigen, daß der zu bildende $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu'|}$ nicht alteriert wird, wenn in a_ν' nur eine gewisse mit ν wachsende Anzahl der a_ν berücksichtigt, die übrigen $= 0$ gesetzt werden, und daß man darauf eine Folge $a_{n_1}', a_{n_2}', \cdots$ bilden kann, sodaß irgend ein a_ν höchstens in *einem* der a_{n_i}' vorkommt. Man ist der zu diesem Nachweise nötigen Abschätzungen enthoben, wenn man die Funktion $\psi(z)$ so wählt, daß von vornherein ohne Vernachlässigung die Folge der a_ν' jene Eigenschaft besitzt.

Dies werden wir im folgenden tun. Zuvor ist aber eine Bemerkung zu machen: Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß das Flächenstück, in dem $F(x)$ regulär ist, und für das eine Entwickelung der Form

$$F(x) = \sum a_\nu(\psi(x))^\nu$$

gesucht wird, schlicht sei, d. h. die Ebene nur einmal überdecke. Die Funktion $\psi(z)$ ist dann in dem Gebiete verzweigt, sonst bleibt alles beim

alten, nur der Umstand könnte Schwierigkeiten bereiten, daß $\frac{F(z)}{\psi(z)-\psi(x)}\cdot\psi'(z)$ an den Verzweigungspunkten nicht mehr regulär ist; doch ist dies ohne Einfluß, da das Residuum von $\frac{F(z)}{\psi(z)-\psi(x)}\cdot\psi'(z)$ an den Verzweigungspunkten gleich Null ist (wenn nicht gerade der Punkt x ein Verzweigungspunkt ist).

Ich setze

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(x'^{m}+x'^{m+k}\right) \text{ — } k \text{ relativ prim zu } m \text{ — und}\\ x' &= r'e^{i\varphi'} = \psi(x). \end{aligned}$$

Es ist

$$(2)\qquad |x| = \frac{r'^{m}}{2}\sqrt{1+2r'^{k}\cos k\varphi' + r'^{2k}},$$

woraus man schließt, daß für

$$|x'| \leqq 1 \quad \text{auch} \quad |x| < 1$$

ist; und nur für

$$x' = e^{\frac{2l\pi i}{k}} \qquad (l=0,1,\cdots k-1): \qquad |x| = 1,$$

nämlich

$$x = e^{\frac{2lm\pi i}{k}} = e^{\frac{2\lambda\pi i}{k}} \qquad (\lambda = 0,1,\cdots k-1)$$

wird.

Auf der Riemannschen Fläche, auf welcher $\psi(x)$ eindeutig ist, liegt also das Gebiet $|\psi(x)|<1$ ganz innerhalb des Gebietes $|x|<1$ und berührt dasselbe in Punkten $x = e^{\frac{2\lambda\pi i}{k}}$ $(\lambda = 0,\ 1,\cdots k-1)$. Beide Gebiete sind übrigens, wie unschwer einzusehen, zusammenhängend und je von einer einzigen den Punkt ∞ $(m+k)$ mal umlaufenden Kurve begrenzt. Eine Funktion, die auf der Riemannschen Fläche für $\psi(x)$ im Gebiete $|x|<1$ regulär ist, läßt sich also jedenfalls nach Potenzen von $x'=\psi(x)$ entwickeln, solange $|x'|<1$; dies trifft insbesondere zu bei einer Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ $\left(\overline{\lim_{\nu=\infty}}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}=1\right)$ die sogar eine in diesem Gebiete unverzweigte Funktion darstellt.

Dann und nur dann wenn keiner der Punkte $e^{\frac{2\lambda\pi i}{k}}$ ein singulärer der Funktion $F(x)=\sum a_\nu x^\nu$ ist, ist der Konvergenzkreis der Reihe $\sum a_\nu' x'^\nu$ größer als 1, sonst gleich 1. Ich wähle zunächst $k=1$. Dann erhält man, wenn man in $\sum a_\nu x^\nu$ aus (1) für x seinen Wert in x' einsetzt und nach Potenzen von x' ordnet, falls

$$(3)\qquad n = n_2 m^2 + \nu_1 m + \nu \left(\begin{matrix}0\leqq \nu < m\\ 0\leqq \nu_1 < m\end{matrix};\quad \lim n_2 = \infty\right):$$

$$(4) \qquad a_n' = \sum_0^{\lambda} \frac{1}{2^{n_2 m + \nu_1 - \lambda}} \binom{n_2 m + \nu_1 - \lambda}{\nu + \lambda m} a_{n_2 m + \nu_1 - \lambda};$$

a_n' ist eine Funktion von höchstens $\left[\frac{n}{m(m+1)}\right]$*) der a_ν, nämlich derjenigen, deren Indices zwischen $\left[\frac{n+m}{m+1}\right]$ und $\left[\frac{n}{m}\right]$ liegen. Diese einfache Tatsache ist die Quelle vieler wichtiger Resultate, welche die Herren Hadamard, Fabry, Leau u. a.**) über die Taylorsche Reihe und ihre analytische Fortsetzung gefunden haben. Man könnte versucht sein, die Summe (4) für a_n' durch Weglassung der für den zu bildenden oberen Limes irrelevanten Glieder am Anfang und Ende der Summe von noch weniger der a^ν abhängen zu lassen; doch wird dadurch nichts gewonnen, was nicht auch durch Wahl eines größeren m erreicht werden könnte. Die für $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{|a_\nu'|}$ ausschlaggebenden Glieder liegen ungefähr in der Mitte der Summen (4): man gebe dem laufenden Index λ den Wert:

$$(5) \qquad \lambda = \frac{n_2 m}{2m+1} + l,$$

wo l, wie auch n wachsen, zwischen endlichen Grenzen bleiben und so gewählt sein möge, daß λ eine ganze Zahl wird; das $(\lambda+1)^{\text{te}}$ Glied der Summe (4) ist dann das folgende:

$$(6) \quad \frac{1}{2^{\frac{2n_2m^2}{2m+1} + \nu_1 - l}} \cdot \frac{\left(\frac{2n_2m^2}{2m+1} + \nu_1 - l\right)!}{\left(\frac{n_2m^2}{2m+1} + \nu + lm\right)! \left(\frac{n_2m^2}{2m+1} + \nu_1 - \nu - (m+1)l\right)!} a_{\frac{2n_2m^2}{2m+1} + \nu_1 - l}.$$

Da m, l, ν und ν_1 unter einer endlichen Grenze bleibende Zahlen sind, kann man für (6) auch schreiben:

$$(6a) \qquad \frac{1}{2^{\left[\frac{2n_2m^2}{2m+1}\right]}} \cdot \frac{(n_2 m)^p \left[\frac{2n_2m^2}{2m+1}\right]!}{\left(\left[\frac{n_2m^2}{2m+1}\right]!\right)^2} a_\mu,$$

wo man unter p eine ebenfalls unter einer endlichen Grenze bleibende Zahl

*) $[x]$ bedeutet die größte in x enthaltene ganze Zahl.

**) Eine vollständige Bibliographie und glänzende Übersicht über die einzelnen hierher gehörigen Theorien gibt Herr Hadamard in seiner Schrift: La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901. Ich gehe oben nur beispielsweise und nur insoweit auf diese Betrachtungen ein, als einige hierher gehörige Sätze, die sonst schon auf andrem Wege bewiesen wurden, sich auch aus dem Entwickelungsprinzipe dieses Abschnitts folgern lassen.

versteht und für $\frac{2n_2m^2}{2m+1} + \nu_1 - l$ zur Abkürzung μ einführt; es ist also nach der Bedeutung der Größen n_2, ν_1 und l (cf. (3) und (5)):

$$\mu = \left[\frac{2n}{2m+1}\right] + l_1, \tag{7}$$

wo l_1, wie auch n wächst, zwischen endlichen Grenzen zu bleiben hat, aber sonst beliebig ist.

Ferner ist, wenn unter ε, ε', ε'' reelle mit wachsendem n oder n_2 verschwindende Zahlen verstanden werden:

$$\frac{\left[\frac{2n_2m^2}{2m+1}\right]!}{\left(\left[\frac{n_2m^2}{2m+1}\right]!\right)^2} = 2^{\left[\frac{2n_2m^2}{2m+1}\right]}(1+\varepsilon)^n \quad \text{(nach der bekannten Näherungsformel der } \Gamma\text{-Funktion)}$$

und $(n_2m)^p = (1+\varepsilon')^n$.

Das Glied (6a) ist also von der Form:

$$a_\mu(1+\varepsilon)^n(1+\varepsilon')^n = a_\mu(1+\varepsilon'')^n. \tag{6b}$$

Indem man die einflußreichen Glieder von a_n' aus der Mitte hervorholt, kann man schreiben:

$$a_n' = b_\mu = C_0a_\mu + \sum_1^{\vartheta\mu}{}^{\nu}(C_\nu a_{\mu+\nu} + C_{-\nu}a_{\mu-\nu}), \tag{8}$$

μ ist durch (7) gegeben, ϑ ist konstant $\left(\text{cca.} = \frac{1}{2m}\right)$, die C sind Zahlenkoeffizienten und es ist nach (6b): $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{C_0} = \lim\limits_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{C_0} = 1$. Aus a_n' ist die n^{te} Wurzel zu ziehen, oder, was bei der Frage, ob der in Betracht kommende obere Limes gleich oder kleiner als 1 ist, auf dasselbe hinausläuft, die μ^{te}. Deshalb schreibe ich im folgenden b_μ für a_n'.

Handelt es sich um die Frage, ob der Punkt $e^{\beta i}$ ein singulärer ist, so führt man in der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für x die Variable $e^{\beta i}x$ ein, d. h. man multipliziert a_ν mit $e^{\nu\beta i}$. Es gilt dann nach dem Vorausgehenden der Satz (s. p. 16):

Der Punkt $e^{\beta i}$ ist ein singulärer oder nicht, je nachdem

$$\lim \sqrt[\mu]{b_\mu(e^{\beta i})} = 1 \quad \text{oder} \quad < 1 \quad \text{ist; dabei ist}$$

$$b_\mu(e^{\beta i}) = C_0a_\mu + \sum_1^{\vartheta\mu}{}^{\nu}(C_\nu a_{\mu+\nu}e^{\nu\beta i} + C_{-\nu}a_{\mu-\nu}e^{-\nu\beta i}).$$

Aus der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ kann man sich diejenigen Terme, für die $\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ um mehr als eine bestimmte positive Zahl kleiner als 1 ist, weggelassen denken, da dieselben für die singulären Punkte auf dem Konvergenzkreise offenbar ohne Einfluß sind. Die so entstehende mit Lücken behaftete Reihe möge $\sum a_{n_\nu}x^{n_\nu}$ sein.

Theorem: Ist $\lim \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} > \lambda$ (λ fix), so ist der Konvergenzkreis — nach unserer Festsetzung immer der Einheitskreis — eine natürliche Grenze der Funktion.

$\sqrt[n_\nu]{|b_{n_\nu}(e^{\beta i})|}$ reduziert sich nämlich auf $\sqrt[n_\nu]{|C_0 a_{n_\nu}|}$, und diese ν_ν^{te} Wurzel ist für genügend großes n_ν von 1 so wenig als man nur will verschieden.

Es ist übrigens für diese Schlußweise nicht nötig, daß

$$\lim \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} > \lambda$$

ist, sondern es muß nur unendlich viele Indices n_ν geben, für welche sowohl

$$\frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{n_\nu} > \lambda$$

als

$$\frac{n_\nu - n_{\nu-1}}{n_{\nu-1}} > \lambda$$

ist.

Dieser zuerst von Herrn Hadamard gegebene Satz ist freilich schon weit überholt; zuerst hat Herr Borel bewiesen, daß es genügt vorauszusetzen: $\lim \frac{n_{\nu+1} - n_\nu}{\sqrt{n_\nu}} > \lambda$; dann ist es Herrn Fabry gelungen zu zeigen, daß der Konvergenzkreis eine natürliche Grenze ist, falls nur $\lim n_{\nu+1} - n_\nu = \infty$ ist.

Es erübrigt nur noch, den Fall, wo in der Substitution

$$x = \frac{1}{2}(x'^m + x'^{m+k})$$

die ganze Zahl $k > 1$ und relativ prim zu m ist, mit einigen Worten zu berühren. Geht $F(x) = \sum a_\nu x^\nu$ durch diese Substitution über in $\sum a_\nu' x'^\nu$, so hängt irgend ein a_ν' nur von solchen a_ν ab, deren Indices sich um ganze Vielfache von k unterscheiden; denn wenn a_μ in a_ν' vorkommt, so muß es zwei ganze Zahlen p und q geben, sodaß:

$$pm + q(m+k) = \nu$$

und

$$p + q = \mu$$

ist, aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\mu m \equiv \nu \,(\text{mod. } k).$$

Diese Kongruenz hat aber, da m und k als teilerfremd vorausgesetzt wurden, nur solche Lösungen μ, die einander mod. k kongruent sind, q. e. d.

Indem man wie oben die ausschlaggebenden Glieder von a_ν' hervorzieht und durch die Substitution $x e^{\beta i} | x$ $\left(\beta < \frac{2\pi}{k}\right)$ die Punkte

$e^{\beta i + \frac{2l\pi i}{k}}$ statt der Punkte $e^{\frac{2l\pi i}{k}}$ in Betracht zieht, erhält man einen Ausdruck:

$$b_\mu(e^{\beta i}) = C_0 a_\mu + \sum_1^{\vartheta\mu} (C_\nu a_{\mu+\nu k} e^{\nu k \beta i} + C_{-\nu} a_{\mu-\nu k} e^{-\nu k \beta i}),$$

und jenachdem $\overline{\lim} \sqrt[\mu]{|b_\mu(e^{\beta i})|} = 1$ oder < 1, befindet sich unter den Punkten $e^{\beta i + \frac{2l\pi i}{k}}$ ein oder kein singulärer.

Weiter schließt man ganz analog wie oben:

Sei $a_{n_1}, a_{n_2} \cdots$ diejenige unendliche Folge von Koeffizienten der Reihe $\sum a_\nu x^\nu \left(\overline{\lim} \sqrt[\nu]{(a_\nu)} = 1\right)$, welche folgende Eigenschaften besitzt:

$$1)\quad n_i = n_1 \pmod{k},$$

$$2)\quad \lim \sqrt[n_i]{|a_{n_i}|} = 1,$$

so ist, wenn noch

$$3)\quad \lim \frac{n_{i+1} - n_i}{n_i} > \lambda$$

ist, mindestens der k^{te} Teil der Peripherie des Einheitskreises eine singuläre Linie. $b_{n_\nu}(e^{\beta i})$ reduziert sich nämlich jedesmal auf das erste Glied, woraus man schließt, daß für jedes β einer der Punkte $e^{\beta i + \frac{2l\pi i}{k}}$ ein singulärer ist $(l = 0, 1 \cdots k-1)$.

§ 5.

Um nicht zu sehr abzuschweifen, verweise ich bezüglich weiterer Sätze, die sich aus den Ausdrücken $b_\mu(e^{\beta i})$ ableiten lassen, auf die Arbeiten des Herrn Fabry*); man findet dort nicht nur Beispiele sehr allgemeiner Funktionen, die ihren Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze haben, sondern auch einen Beweis des von Herrn Pringsheim zuerst auf andrem Wege bewiesenen Satzes, daß eine aufs Geratewohl hingeschriebene Potenzreihe mit endlichem Konvergenzkreise, sich über den letzteren nicht fortsetzen läßt. Ich widme vielmehr den Rest dieses Abschnittes und den ganzen folgenden Betrachtungen von gewissermaßen entgegengesetzter Natur; es sollen nämlich sehr allgemeine Beispiele von Reihen angegeben werden, die nur ganz bestimmte vereinzelte Singularitäten aufweisen. Hierher gehört der Satz des Herrn Hadamard**):

Die durch die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu x^\nu$ definierte Funktion hat in der ganzen Ebene keine andern singulären Stellen als die Punkte 1 und ∞, wenn a_ν sich in der Form darstellen läßt:

*) Ann. éc. norm. 13 (1896); acta math. 22 (1899).

**) Journ. de math. 8 (1892).

$$a_\nu = \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt,$$

wobei nur vorausgesetzt ist, daß $\int_0^1 V(t)\, t\, dt$ absolut konvergiert.

Herr Pringsheim*) hat gelegentlich einen Teil dieses Satzes auf elementare Weise bewiesen, nämlich daß die Reihe

$$F(x) = \sum_1^\infty{}_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt \cdot x^\nu$$

links von der Geraden $\xi = 1$ — $x = \xi + i\eta$ gesetzt — keine Singularitäten besitzt. Der Beweis des Herrn Pringsheim ist eine Anwendung des allgemeinen Prinzips, das zu Anfang dieses Abschnitts auseinandergesetzt wurde; ich werde ihn daher im folgenden als weiteres Beispiel geben und zugleich zeigen, daß er sich ohne Schwierigkeit zu dem Nachweis erweitern läßt, daß $F(x)$ in der ganzen längs der reellen Axe $1 - \infty$ aufgeschnittenen Ebene sich regulär verhält.

Einen allgemeineren Hadamardschen Satz werde ich im folgenden Abschnitte auf andre ebenfalls elementare Weise beweisen. (cf. p. 38.)

Als Funktion $\psi(x)$ benützt Herr Pringsheim bei seinem Beweise des eben citierten Hadamardschen Satzes die folgende:

(1) $$x' = \psi(x) = \frac{x}{2 - x},$$

was aufgelöst gibt:

(2) $$x = \frac{2x'}{1 + x'}.$$

Die benutzte Substitution gehört also zu den linear gebrochenen; dieselben haben mit den bei der analytischen Fortsetzung in der Regel benutzten ganzen linearen Substitutionen die charakteristische Eigenschaft gemein, daß sie in der ganzen Ebene eindeutig umkehrbar sind; einem von n Kurven begrenzten Gebiete S der x-Ebene entspricht ein ebensolches S' der x'-Ebene, einer Funktion von x, die in S regulär ist, eine Funktion von x', die in S' regulär ist, und umgekehrt.

In obigem Beispiele ((1), (2)) entspricht dem Gebiete $|x'| < \frac{1}{3}$ das Innere eines Kreises K_1, der mit dem Radius $\frac{3}{4}$ um den Punkt $x = -\frac{1}{4}$ beschrieben ist, der also den Einheitskreis im Punkte $x = -1$ von innen berührt; dagegen besteht das Gebiet $|\psi(x)| < 1$ aus dem ganzen Teile der x-Ebene, der links von der Geraden $\xi = 1$ liegt. Eine innerhalb des Einheitskreises konvergente Potenzreihe

*) Math. Ann. 50 (1898).

(3) $$F(x) = \sum_{1}^{\infty \nu} a_\nu x^\nu$$

muß sich nach dem Satze p. 10 innerhalb K_1 stets durch eine Reihe

(4) $$F(x) = \sum_{1}^{\infty \nu} a'_{\nu-1} x'^\nu = x' \sum_{0}^{\infty \nu} a_\nu' x'^\nu = x' \Phi(x')$$

darstellen kann. Ist der Punkt $x = -1$ kein singulärer der Funktion (3), so wird der Konvergenzradius der Reihe (4) größer als $\frac{1}{3}$ sein; dann und nur dann, wenn $F(x)$ im Gebiete links der Geraden $\xi = 1$ regulär ist, wird dieser Konvergenzradius $= 1$ sein. Es ist zu zeigen, daß dies immer der Fall ist, wenn

(5) $$a_\nu = \int_0^1 V(t)\, t^\nu \, dt \quad \text{ist} \quad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

a_ν' findet man nach der allgemeinen Formel p. 10, oder was erklärlicherweise auf dasselbe hinausläuft, indem man $\sum_{1}^{\infty \nu} a_\nu \left(\frac{2x'}{1+x'}\right)^\nu$ nach steigenden Potenzen von x' ordnet und den Koeffizienten von x'^ν aufsucht. Man erhält:

(6) $$a_\nu' = 2^{\nu+1} a_{\nu+1} - \frac{\nu}{1} 2^\nu a_\nu + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} 2^{\nu-1} a_{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu a_1,$$

speziell für $a_\nu = \int_0^1 V(t)\, t^\nu \, dt$:

(7) $$a_\nu' = \int_0^1 V(t) \cdot 2t \left[2^\nu t^\nu - \frac{\nu}{1} 2^{\nu-2} t^{\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2} 2^{\nu-2} t^{\nu-2} + \cdots + (-1)^\nu \right] dt$$

$$= 2 \int_0^1 V(t)\, t (2t-1)^\nu \, dt \,^*);$$

---

*) Setzt man, was auch genügt, nur die Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\, dt$, nicht diejenige von $\int_0^1 |V(t)|\, dt$ voraus, so kann man hier folgendermaßen weiter schließen:

$$a_\nu' = \int_0^1 V\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \frac{1+\tau}{2} \tau^\nu \, d\tau + (-1)^\nu \int_0^1 V\left(\frac{1-\tau}{2}\right) \frac{1-\tau}{2} \tau^\nu \, d\tau \quad \text{(s. oben (10))}$$

$$= \int_\xi^1 V\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \frac{1+\tau}{2} \, d\tau + (-1)^\nu \int_\eta^1 V\left(\frac{1-\tau}{2}\right) \frac{1-\tau}{2} \, d\tau \quad \text{(nach dem II. (Bonnetschen) Mittelwertsatze).}$$

Die beiden hier rechts stehenden Integrale sind stetige Funktionen ihrer unteren Grenzen, bleiben daher, wenn letztere zwischen 0 und 1 variieren, unter einer endlichen Grenze G, also $|a_\nu'| < 2G$.

$$|a_\nu'| < 2\int_0^1 |V(t)|\, t\, dt. \tag{8}$$

a_ν' $(\nu = 1, 2, 3 \cdots)$ bleibt also unter einer endlichen Grenze und $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu'|}$ ist gleich 1; daraus folgt nach dem oben Bemerkten, daß die Reihe $\sum_1^\infty x^\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt$ das Element einer Funktion ist, das sich über das Kontinuum links der Geraden $\xi = 1$ fortsetzen läßt.

In dem Ausdruck (7) für a_ν' führe ich statt t die neue Variable

$$\tau = 2t - 1 \tag{9}$$

ein und erhalte:

$$\begin{aligned} a_\nu' &= \int_{-1}^{+1} V\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \frac{1+\tau}{2}\, \tau^\nu\, d\tau \\ &= \int_0^1 V\left(\frac{1+\tau}{2}\right)\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \tau^\nu\, d\tau + (-1)^\nu \int_0^1 V\left(\frac{1-\tau}{2}\right) \frac{1-\tau}{2}\, \tau^\nu\, d\tau \\ &= \quad b_\nu' \quad + \quad b_\nu''. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Reihe $\Phi(x') = \sum_0^\infty a_\nu' x'^\nu$ läßt sich also zerlegen in die Summe:

$$\begin{aligned} \Phi(x') &= \Phi_1(x') + \Phi_2(x') \\ &= \sum_0^\infty b_\nu' x'^\nu + \sum_0^\infty b_\nu'' x'^\nu \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{l} b_\nu' = \int_0^1 V\left(\frac{1+\tau}{2}\right) \cdot \frac{1+\tau}{2}\, \tau^\nu\, d\tau \\ b_\nu'' = (-1)^\nu \int_0^1 V\left(\frac{1-\tau}{2}\right) \cdot \frac{1-\tau}{2}\, \tau^\nu\, d\tau \end{array} \right).$$

Nun ist nach dem soeben bewiesenen Satze $\Phi_1(x')$ regulär in dem Gebiete links von der Geraden $\xi' = 1$; $\Phi_2(x')$ dagegen ist, wie man nach der Substitution $y' = -x'$ aus dem gleichen Satze erschließt, regulär in dem Gebiete, das rechts von der Geraden $\xi' = -1$ liegt, $\Phi(x')$ also regulär in dem diesen beiden Gebieten gemeinsamen Streifen zwischen den Geraden $\xi = -1$ und $\xi = +1$, $F(x)$ demnach in dem entsprechenden Gebiete, das besteht aus der Ebene links von der Geraden $\xi = 2$ mit Ausschluß des Innern des Kreises, der mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $x = \frac{3}{2}$ beschrieben ist, der also durch die Punkte 1 und 2 geht.

Dieses für $F(x)$ gefundene Resultat wendet man an auf die Funktionen $\Phi_1(x')$ und $\Phi_2(x')$ und findet, daß $\Phi(x')$ regulär ist in dem Gebiete zwischen den Geraden $\xi = -2$ und $\xi = +2$ mit Ausnahme des

Innern zweier Kreise, die je mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um die Punkte $\frac{3}{2}$ und $\frac{-3}{2}$ beschrieben sind, woraus man wieder schließt, daß $F(x)$ regulär ist in dem Gebiete links von der Geraden $\xi = 4$ und außerhalb von 2 Kreisen, die ihre Mittelpunkte auf der ξ-Axe haben und die letztere schneiden resp. in den Punkten

$$1, \frac{4}{3}; \frac{4}{3}, 4.$$

Nach n maliger Wiederholung dieses alternierenden Beweisverfahrens gelangt man zu folgendem Satze:

$F(x)$ ist regulär links von der Geraden $\xi = 2^n$ mit Ausnahme des Innern von 2^{n-1} Kreisen, die sämtlich ihre Mittelpunkte auf der reellen Achse haben und dieselbe schneiden resp. in den Punkten:

$$1, \frac{2^n}{2^n-1}; \frac{2^n}{2^n-1}, \frac{2^n}{2^n-3}; \cdots \frac{2^n}{2m+1}, \frac{2^n}{2m-1}; \cdots \frac{2^n}{3}, 2^n.$$

Um die Behauptung zu erweisen, daß $F(x)$ in der ganzen längs der reellen Achse $1 - \infty$ aufgeschnittenen Ebene regulär ist, ist nur folgendes zu zeigen: Ist eine noch so große Zahl K und eine noch so kleine ε vorgegeben, so läßt sich stets (durch Wahl eines genügend großen n) erreichen, daß die Durchmesser aller derjenigen Kreise, welche die reelle Achse auf der endlichen Strecke $1 \cdots K$ schneiden, unter ε herabsinken. Der Durchmesser des Kreises, der die reelle Achse in den Punkten $\frac{2^n}{2m+1}$ und $\frac{2^n}{2m-1}$ schneidet, ist gleich der Differenz dieser beiden Zahlen $= \frac{2^{n+1}}{4m^2-1}$; die Durchmesser der diesem voraufgehenden Kreise sind kleiner. Worauf es zu zeigen ankommt, ist also, daß es gelingt, zwei Zahlen m und n so zu finden, daß gleichzeitig:

$$\frac{2^{n+1}}{4m^2-1} < \varepsilon$$

und

$$\frac{2^n}{2m-1} > K$$

ist.

Dies geschieht aber z. B. wenn man n unbegrenzt wachsen läßt und gleichzeitig m etwa von der Ordnung $\sqrt{2^n \lg 2^n}$ unendlich werden läßt. Hiermit ist der fragliche Satz bewiesen*).

*) Die Transformation, welche den obigen Beweis lieferte, ist neuerdings in Fragen der analytischen Fortsetzung viel benutzt worden (s. Hadamard, La série de Taylor p. 28); angegeben wurde sie schon von Euler, dessen Name sie auch führt: Inst. calc. diff. Pars II, Cap. I.

II. Abschnitt.

Weitere Beispiele zur Theorie der analytischen Fortsetzung.

§ 1.

Im vorigen Abschnitte wurde schon gelegentlich betont, daß einerseits eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius, aber mit im übrigen willkürlichen Koeffizienten ihren Konvergenzkreis im allgemeinen zur natürlichen Grenze hat*), während andrerseits Potenzreihen, deren Koeffizienten a_ν in bestimmter noch sehr allgemeiner Weise von dem Index ν abhängen, nur ganz bestimmte vereinzelte Singularitäten aufweisen; ja, es ist die Mächtigkeit der nicht fortsetzbaren Reihen keine größere als diejenige der Taylorschen Reihen, welche den Einheitskreis als Konvergenzgrenze und auf demselben nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen; denn die Mächtigkeit dieser Reihen ist schon die gleiche wie die aller analytischen Funktionen überhaupt. Es folgt dies ohne weiteres aus schon bekannten Untersuchungen, wie auch aus den in diesem Abschnitt mitzuteilenden (cf. Theorem I, p. 28).

Es soll hier nämlich die Fortsetzbarkeit spezieller Taylorscher Reihen untersucht werden, nämlich solcher, wo der Koeffizient a_ν das eine Mal eine Potenzreihe von $\frac{1}{\nu}$ ist, das andre Mal, wo a_ν eine ganze Funktion $G(\nu)$ von ν ist, die schwächer unendlich wird als $e^{\varepsilon r}$ (d. h.

$$\lim_{r=\infty} |G(re^{i\varphi})|\, e^{-\varepsilon r} = 0 \text{ für jedes positive } \varepsilon).$$

Über die zuerst erwähnte Klasse von Reihen hat schon Herr Leau**) auf kompliziertere Weise einen Satz bewiesen, der mit dem unten stehenden Theorem I übereinstimmt; auch bezüglich der oben genannten Reihen $\sum G(\nu) x^\nu$ gelangt Herr Leau zu einem ähnlich lautenden Satze; dagegen glaube ich, daß die viel präzisere Aussage, eine solche Reihe habe nur die eine wesentliche singuläre Stelle $x = 1$, sowie die Umkehrung dieses Satzes neu sind.

*) Pringsheim, Math. Ann. 44 (1894); Borel, acta math. 21 (1897); Fabry, acta math. 22 (1899).

**) Journ. de Math. 5 (1899).

Im dritten Paragraphen gebe ich dann einen elementaren Beweis eines zuerst von Herrn Hadamard auf Grundlage des Cauchyschen Funktionsbegriffs bewiesenen Satzes über die Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion $\sum a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt \cdot x^\nu$ von denjenigen der Funktion $\sum a_\nu x^\nu$.

Allerdings werden diese Betrachtungen in ziemlich lockerem Zusammenhang mit den allgemeinen Darstellungssätzen des vorigen Abschnitts stehen; immerhin wird man die Theorie der analytischen Fortsetzung als verknüpfendes Band gelten lassen; auch dürfte es nicht ohne Interesse sein, daß sich alle diese Beweise — und noch andere ähnliche mehr — aus einer einzigen Quelle ableiten lassen, als welche sich der Weierstraßsche Doppelreihensatz erweist. Ich stelle denselben daher hier an die Spitze, indem ich ihn zugleich in verallgemeinerter Form ausspreche:

Gegeben sei eine unendliche Folge von analytischen Funktionen:

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,$$

die sämtlich regulär sind in einem einfach zusammenhängenden endlichen Gebiete S, das vermöge der Funktion $x' = \psi(x)$ auf das Innere eines mit dem Radius R um den Nullpunkt der x'-Ebene beschriebenen Kreises abgebildet wird. In S gelten daher Entwickelungen der Form (cf. p. 10):

$$f_\mu(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\mu)} (\psi(x))^\nu.$$

Ferner werde vorausgesetzt, daß $\sum_0^\infty{}_\mu f_\mu(x)$ konvergiert im Gebiete $|\psi(x)| < R$ und gleichmäßig auf der Kurve $|\psi(x)| = r\ (< R)$.

Dann ist im Gebiete $|\psi(x)| < r$

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\mu f_\mu(x)$$

eine analytische Funktion von x:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\nu A_\nu (\psi(x))^\nu,$$

wobei

$$A_\nu = \sum_0^\infty{}_\mu a_\nu^\mu\ ^*).$$

Mit Hilfe dieses Satzes beweise ich nun das

*) Bei Weierstraß (Werke II, p. 205) ist $\psi(x) = x - x_1$; in allen folgenden Anwendungen steht von vornherein die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum f_\mu(x)$ im ganzen zweifach ausgedehnten Gebiete fest; in diesem Falle genügt auch der Weierstraßsche Satz in seiner speziellen Fassung zum Nachweis, daß $\sum f_\mu(x)$ eine in S reguläre analytische Funktion darstellt.

Theorem I: *Wenn*

(1) $$a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) \qquad (\nu \geqq n)$$

ist, wo

(2) $$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine für $|x| \leqq \frac{1}{n}$ *konvergente Potenzreihe bedeutet, so hat die Funktion*

(3) $$F(x) = \sum_\nu a_\nu x^\nu$$

in der längs der reellen Achse $1 \cdots \infty$ *aufgeschnittenen Ebene keine singuläre Stelle.*

Ferner werde ich zeigen: *der Einschnitt* $1 \cdots \infty$ *ist ein „künstlicher"*, d. h. auf demselben sind nur 1 und ∞ singuläre Punkte. Dies wird sich aus dem Umstande ergeben, daß man statt des geradlinigen Einschnitts einen andern wählen darf, der von einer beliebigen logarithmischen Spirale mit dem Nullpunkte als Pol gebildet wird. Es steht zu vermuten, daß die im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion $F(x)$ auch in ihren anderen Zweigen keine weiteren singulären Punkte hat als die Punkte $1, \infty$ und den Nullpunkt; doch folgt dies aus unserer Analyse nicht, da man stets nur den Einheitskreis des obersten Blattes behält, wenn man den Schnitt längs einer der obigen logarithmischen Spiralen führt, man also über das, was innerhalb des Einheitskreises der übrigen Blätter geschieht, keine Aussage machen kann.

Statt für

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

genügt es offenbar den Beweis zu führen für

$$a_m + a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \cdots = \frac{F(x) - \sum_0^{m-1} a_\nu x^\nu}{x^m},$$

welche Funktion wieder $F(x)$ heißen möge.

Ich betrachte folgende Reihe von Funktionen:

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots,$$

(4) $$f_1(x) = \frac{\int_0^x f_0(x)\, x^{m-1}\, dx}{x^m} = \frac{1}{m} + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{m+2} + \cdots,$$

. . . .

$$f_k(x) = \frac{\int_0^x f_{k-1}(x)\, x^{m-1}\, dx}{x^m} = \frac{1}{m^k} + \frac{x}{(m+1)^k} + \frac{x^2}{(m+2)^k} + \cdots$$

. . . .

Die erste dieser Funktionen hat die eine singuläre Stelle $x = 1$; bei der zweiten sind infolge der Integration der Punkt $x = \infty$ und infolge der Division mit x^m der Punkt $x = 0$ in den übrigen Zweigen der Funktion als singuläre hinzugetreten. Weitere Singularitäten können auch bei den übrigen Funktionen $f_k(x)$ nicht auftreten; wäre nämlich α ein von 0, 1, ∞ verschiedener singulärer Punkt, der zum ersten Male bei $f_k(x)$ auftrete, so würde man schließen, daß α auch ein singulärer Punkt von $x^m f_k(x)$ und von $\frac{1}{x^{m-1}} \frac{dx^m \cdot f_k(x)}{dx} = f_{k-1}(x)$ wäre gegen die Voraussetzung.

Ich mache nun zunächst den Einschnitt auf der reellen Achse vom Punkte 1 bis ∞ und erweitere diesen Einschnitt, indem ich vom Nullpunkte aus zwei Gerade ziehe, die mit der positiven reellen Achse die Winkel $\pm \varepsilon$ bilden, ferner einen Kreisbogen mit dem Radius $1 - \varepsilon$, und eliminiere das unendliche Stück der Ebene, das von den zwei Geraden und dem Kreisstückchen begrenzt ist, und den Punkt 1 enthält. Außerdem schließe ich die Umgebung des Punktes ∞ durch einen beliebig großen Kreis mit dem Radius R aus.

Da in dem übrig bleibenden Stücke S der Ebene alle vorkommenden Funktionen regulär und eindeutig sind, sind die Integrationen unabhängig vom Wege; dieselben werden im folgenden längs der Geraden $0 - x$ ausgeführt gedacht.

Sei G das Maximum von $\left|\frac{1}{1-x}\right|$ in S; ich behaupte das Maximum von $|f_k(x)|$ ist kleiner als $\frac{G}{n^k}$.

Es ist nämlich, wenn $x = re^{i\varphi}$ gesetzt wird:

$$|f_1(x)| < G \cdot \frac{\int_0^{|x|} |x^{m-1}|\,|dx|}{|x^m|} = G \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m},$$

$$< \frac{G}{m}$$

und allgemein, wenn

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{m^{k-1}}$$

ist (für alle x in S), so folgt

$$|f_k(x)| < \frac{G}{m^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^r r^{m-1} dr}{r^m} = \frac{G}{m^k}, \tag{5}$$

und für $m > n$:

$$< \frac{G}{n^k}$$

für jedes, x in S, q. e. d.

Daher ist

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu f_\nu(x) = \sum_0^l{}_\nu c_\nu f_\nu(x) + R_l(x) \tag{6}$$

(die c sind die Koeffizienten der Potenzreihe (2)) für alle Punkte x von S gleichmäßig konvergent; denn

$$|R_l(x)| < G \sum_l^\infty{}_\nu \frac{|c_\nu|}{m^\nu} < \varepsilon, \tag{7}$$

wenn l genügend groß gewählt ist. $\Phi(x)$ stellt demnach in S eine reguläre analytische Funktion $F(x)$ dar; die Entwickelung derselben um den Nullpunkt lautet:

$$\begin{aligned} F(x) = &\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{m^\nu} + x \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(m+1)^\nu} + x^2 \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(m+2)^\nu} + \cdots \\ &= \mathfrak{P}\left(\frac{1}{m}\right) + x\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+1}\right) + x^2\,\mathfrak{P}\left(\frac{1}{m+2}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

und diese Potenzreihe läßt sich nach dem eben bewiesenen analytisch fortsetzen über das ganze Gebiet $\mathfrak{S}$.

Wir haben nun den gleichen Satz zu beweisen unter der Voraussetzung, daß der Einschnitt nicht von einer Geraden, sondern von einer logarithmischen Spirale gebildet wird. Es soll also jetzt statt des Gebietes, das von den Geraden $y = \pm \operatorname{tg} \varepsilon \cdot x$ und von Bögen der Kreise mit den Radien R und $1 - \varepsilon$ begrenzt wurde, das folgendermaßen definierte endliche Gebiet S betrachtet werden: wenn die logarithmische Spirale mit der Gleichung $r = \gamma e^{\beta\varphi}$ durch den Punkt 1 geht, so sei S begrenzt von zwei logarithmischen Spiralen mit den Gleichungen: $r = (\gamma \pm \varepsilon) e^{\beta\varphi}$, ferner von einem Stückchen der zu diesen senkrechten logarithmischen Spirale, die durch den Punkt $1 - \varepsilon$ geht, und endlich von einem Bogenstück des Kreises mit dem Radius R. Die Integrationskurven seien jetzt unter einander ähnliche logarithmische Spiralen mit den Gleichungen $r = \alpha e^{\beta\varphi}$ (α Parameter, β fest).

Da wir oben bei geradlinigem Schnitt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes einzig aus der Ungleichung (5) erschlossen haben, so ist nur noch das Fortbestehen dieser Ungleichung unter den geänderten Verhältnissen zu beweisen. Dies geschieht wieder durch den Schluß von n auf $n + 1$. Sei also wieder G das Maximum von $|f_0(x)|$ in dem jetzigen Bereiche S und sei schon bewiesen, daß

$$|f_{k-1}(x)| < \frac{G}{n^{k-1}},$$

so bleibt zu zeigen, daß

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^k}$$

für jedes x in S. Es ist aber

$$|f_k(x)| < \frac{\int_0^x |f_{k-1}(x)|\,|x^{m-1}|\,|dx|}{|x^m|} < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{\int_0^x r^{m-1}|dx|}{r^m};$$

$|dx|$ ist hier nicht mehr $= dr$, sondern $= \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, $d\varphi$ ist $= \frac{dr}{r \cdot \beta}$, also

$$|dx| = dr \sqrt{1 + \frac{1}{\beta^2}} = dr \cdot c,$$

wo c für alle Spiralen die gleiche Konstante ist. Es folgt

$$|f_k(x)| < \frac{G}{n^{k-1}} \cdot \frac{c}{m} < \frac{G}{n^k},$$

wenn nur $m > cn$ gewählt ist. Das Fortbestehen dieser Umkehrung war aber das einzige, was noch zu beweisen war zur vollständigen Erledigung des obigen Satzes über die singulären Stellen von

$$F(x) = \sum \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right) x^\nu.$$

§ 2.

Während wir soeben a_ν in der Form $a_\nu = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ voraussetzten, nehmen wir jetzt an, daß a_ν gleich einer ganzen Funktion von ν ist:

(1) $$a_\nu = G(\nu) = c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2 + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, \cdots).$$

Da man leicht ganze Funktionen konstruieren kann, die an den Stellen $1, 2, \cdots$ willkürlich vorgegebene Werte $a_1, a_2, \cdots$ annehmen, so müssen wir $G(x)$ noch einer Einschränkung unterwerfen*):

Wir setzen voraus, daß wenn $\varepsilon\ (>0)$ beliebig klein vorgegeben ist, eine Zahl r' existiert, sodaß für $r > r'$ die Ungleichung gilt:

(2) $$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}.$$

Dies vorausgesetzt, beweise ich das

Theorem II: *Die Potenzreihe* $\sum_1^\infty G(\nu)x^\nu$ *ist das Element einer eindeutigen Funktion, die sich in der ganzen Ebene regulär verhält außer im Punkte* $x = 1$, *der ein wesentlich singulärer für die Funktion ist.*

Zuvörderst erwähne ich folgenden von Herrn Poincaré**) herrührenden Hilfssatz, der das Abnehmen der Koeffizienten c_ν von $G(x)$ beleuchtet:

---

*) cf. Hadamard, La série de Taylor, p. 29.

**) Bull. soc. math. F. T. 11, 1883 p. 138; s. a. Borel, Leçons sur les Fonct. entières, Paris 1900, p. 54.

Die Funktion $\sum_0^\infty {}_\nu c_\nu \nu!\, x^\nu$ ist eine ganze Funktion von x. Zum Beweise, den ich nur andeute, betrachte man das Integral

$$J(x) = \int_0^\infty e^{-t} G(tx)\, dt. \tag{3}$$

Vermöge der Ungleichung (2) hat dieses Integral für jeden endlichen Wert von x einen Sinn und stellt eine ganze Funktion dar*), die Entwickelung derselben nach steigenden Potenzen von x lautet:

$$J(x) = \sum_0^\infty {}_\nu c_\nu \nu!\, x^\nu, \tag{4}$$

und daher

$$\lim \sqrt[\nu]{|c_\nu|\, \nu!} = 0. \tag{5}$$

Nach dieser Vorbemerkung betrachte ich folgende Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{x}{1-x} &&= x + x^2 + x^3 + \cdots, \\ f_1(x) &= x \cdot f_0'(x) &&= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_\varkappa(x) &= x f_{\varkappa-1}'(x) = x + 2^\varkappa x^2 + 3^\varkappa x^3 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

und behaupte $f_k(x)$ läßt sich in der Form darstellen:

$$f_\varkappa(x) = \sum_1^\varkappa {}_\nu b_\nu^{(\varkappa)} x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu}. \tag{7}$$

Da die Behauptung für $\varkappa = 1$ zutrifft, genügt der Schluß von $\varkappa - 1$ auf $\varkappa$, es sei also

$$f_{\varkappa-1}(x) = \sum_1^{\varkappa-1} {}_\nu b_\nu^{(\varkappa-1)} x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu};$$

dann ist

$$f_\varkappa(x) = x f_{\varkappa-1}'(x) = \sum_1^\varkappa {}_\nu \left(\nu b_\nu^{(\varkappa-1)} + b_{\nu-1}^{(\varkappa-1)}\right) x^\nu \frac{d^\nu f_0(x)}{dx^\nu};$$

man findet also

$$b_\nu^{(\varkappa)} = \nu b_\nu^{(\varkappa-1)} + b_{\nu-1}^{(\varkappa-1)}; \tag{8}$$

also speziell, da nach (7) $b_\varkappa^{(\varkappa-1)} = 0$ ist:

$$b_\varkappa^{(\varkappa)} = b_{\varkappa-1}^{(\varkappa-1)} = \cdots = b_1^{(1)} = 1. \tag{8b}$$

*) Vgl. auch die im § 3 auseinandergesetzte Beweismethode.

Ferner behaupte ich

$$b_\nu^{(\varkappa)} < \frac{2^\varkappa(\varkappa-1)!}{\nu!} \tag{9}$$

und beweise diese Ungleichung wieder durch den offenbar zulässigen Schluß von $\varkappa - 1$ auf $\varkappa$:

$$b_\nu^{(\varkappa)} < \nu\,\frac{2^{\varkappa-1}(\varkappa-2)!}{\nu!} + \frac{2^{\varkappa-1}(\varkappa-2)!}{(\nu-1)!} = \frac{2^\varkappa(\varkappa-2)!}{(\nu-1)!} \leqq \frac{2^\varkappa(\varkappa-1)!}{\nu!}$$

zunächst für $\nu \leqq \varkappa - 1$, aber nach (8b) auch für $\nu = \varkappa$, sodaß Ungleichung (9) allgemein gilt; daraus folgt nun

$$\begin{aligned} |f_\varkappa(x)| &< 2^\varkappa(\varkappa-1)! \sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{1}{\nu!}\left|\frac{x^\nu d^\nu f_0(x)}{dx^\nu}\right| \\ &< 2^\varkappa(\varkappa-1)! \sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{|x^\nu|}{|1-x|^{\nu+1}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Um den Punkt $x = 1$ schlage ich einen beliebig kleinen Kreis mit dem Radius ϱ; in dem ganzen unendlichen Gebiete außerhalb dieses Kreises bleibt der Ausdruck $\frac{|x|}{|1-x|}$ unter einer endlichen Grenze $G(>1)$; daher

$$\sum_1^\varkappa{}_\nu \frac{|x|^\nu}{|1-x|^{\nu+1}} < \frac{\varkappa G^\varkappa}{|1-x|}; \tag{11}$$

setzt man noch $\frac{2^\varkappa G^\varkappa}{|1-x|} = H'^\varkappa$, so bleibt H' für alle x in S und für alle Exponenten unter einer endlichen Grenze H und man hat nach (10) und (11):

$$|f_\varkappa(x)| < H^\varkappa \varkappa! \tag{12}$$

Bildet man mit den Koeffizienten c_ν der ganzen Funktion $G(x)$ (1) die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu f_\nu(x), \tag{13}$$

so konvergiert dieselbe zufolge der Ungleichungen (5) und (12) im ganzen Gebiete S gleichmäßig, stellt also daselbst eine analytische Funktion $F(x)$ dar; die Entwickelung von $F(x)$ in eine Potenzreihe um den Nullpunkt lautet:

$$\begin{aligned} F(x) &= x\sum_0^\infty c_\nu + x^2\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu 2^\nu + x^3\sum_0^\infty c_\nu 3^\nu + \cdots \\ &= \sum_1^\infty G(\nu)x^\nu. \end{aligned}$$

Diese Taylorsche Reihe ist also das Element einer in der ganzen Ebene eindeutigen und mit Ausnahme des Punktes $x = 1$ regulären Funktion; das ist aber gerade, was unser Theorem behauptet.

Dasselbe läßt sich unmittelbar zu folgender Fassung verallgemeinern:

Sind $G_1, G_2, \cdots, G_l$ l ganze Funktionen, die sämtlich der Bedingung (2) genügen:

$$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r} \qquad (r > r'),$$

so stellt die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu x^\nu$, wo

$$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_l^\nu} G_l(\nu) \tag{15}$$

ist, eine Funktion dar, die in der ganzen Ebene eindeutig ist und die l wesentlich singulären Stellen $x_1, x_2, \cdots, x_l$, sonst aber keine Singularitäten besitzt.

Hat man es mit unendlich vielen singulären Stellen

$$x_1, x_2, \cdots, |x_1| \leqq |x_2| \leqq \cdots, \lim x_\nu = \infty$$

und entsprechenden ganzen Funktionen $G_1, G_2, \cdots$, die alle der Bedingung (2) genügen, zu tun und verlangt man eine Taylorsche Reihe, deren analytische Fortsetzung sich an der Stelle x_i verhält wie die analytische Fortsetzung der Reihe $\sum_1^\infty \frac{1}{x_i^\nu} G_i(\nu)\, x^\nu$, so wird nur in den allerseltensten Fällen der Ansatz

$$a_\nu = \sum_1^\infty \frac{1}{x_\mu^\nu} G_\mu(x)$$

zum Ziele führen. (Hinreichende Bedingungen, damit dieser Fall eintrete, sind leicht anzugeben.) Doch kann man sich stets folgendermaßen helfen: man setze

$$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_{l_\nu}^\nu} G_{l_\nu}(x), \tag{16}$$

wobei außer (2) folgende stets mögliche Bedingungen erfüllt seien:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \lim l_\nu = \infty, \\ &\text{b)} \quad \lim \sqrt[\nu]{l_\nu} = 1, \\ &\text{c)} \quad \sqrt[\nu]{|G_\varkappa(\nu)|} < (1 + \varepsilon_\nu) \quad \text{für} \quad \varkappa \leqq l_\nu \quad \text{mit} \quad \lim \varepsilon_\nu = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Unter diesen Bedingungen ist nämlich $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \frac{1}{|x_1|}$, und wenn unter $a_\nu^{(\varkappa)}$ das verstanden wird, was aus a_ν entsteht, wenn

$$G_1 = G_2 = \cdots = G_{\varkappa - 1} = 0$$

gesetzt wird, so ist

$$\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|a_\nu^{(\varkappa)}|} = \frac{1}{|x_\varkappa|}; \quad \text{d. h.} \quad F_\varkappa(x) = \sum_1^\infty {}_\nu a_\nu^{(\varkappa)} x^\nu$$

ist regulär in einem Kreise mit dem Radius $|x_\varkappa|$; $F(x)$ hat also in diesem Kreise keine anderen Singularitäten wie $F(x) - F_\varkappa(x)$; das letztere ist aber nach dem vorigen Satze eine eindeutige Funktion mit den wesentlich singulären Stellen $x_1, x_2, \cdots x_{\varkappa-1}$ und zwar verhält sich $F(x) - F_\varkappa(x)$ an der Stelle x_i $(i \leqq \varkappa - 1)$ wie die analytische Fortsetzung der Reihe

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{x_i}\right)^\nu G_i(\nu)\, x^\nu.$$

Die im Vorhergehenden mitgeteilten Sätze stehen im engsten Zusammenhange mit der Frage nach den singulären Stellen einer vorgegebenen Taylorschen Reihe. Man kann bei der Untersuchung dieser Frage nach Herrn Hadamard*) zwei völlig verschiedene Gruppen von Methoden unterscheiden:

„Die einen beschränken in keiner Weise die Allgemeinheit der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$. Gerade dieser Umstand verleiht den so erhaltenen Resultaten eine große Bedeutung; doch ist zu fürchten, daß diese Resultate stets zu gering an Zahl bleiben.

Andere Methoden dagegen beziehen sich ausschließlich auf verhältnismäßig einfache Singularitäten und ermangeln daher der Allgemeinheit."

Herr Hadamard hat sich im zweiten Teile seiner Thèse**) auf den letzteren Standpunkt gestellt und den Fall vollständig erledigt, wo alle auftretenden Singularitäten Pole sind.

Auch wir sind durch die voraufgehenden Sätze zu einer ähnlichen einschränkenden Voraussetzung geführt, nämlich nur wesentlich singuläre Stellen zuzulassen, und haben sehr allgemeine Ausdrücke konstruiert, die an vorgegebenen Stellen wesentlich singuläre Punkte besitzen. Die wichtige Frage, die sich nun erhebt ist die folgende:

Sind durch unsere Ausdrücke sämtliche Funktionen der bezeichneten Art erschöpft? oder m. a. W.: Lassen sich die obigen Sätze umkehren?

Ich werde durch den Beweis des folgenden Satzes zeigen, daß dies in der Tat der Fall ist.

Theorem III: *Hat man eine eindeutige Funktion $F(x)$ mit der einen wesentlich singulären Stelle $x = 1$, und lautet die Entwickelung von $F(x)$ nach steigenden Potenzen von x:*

*) La série de Taylor, p. 13.

**) Journ. de Math. 8 (1892).

(1) $$F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_2 x^3 + \cdots,$$

so läßt sich a_ν immer in der Form darstellen:

(2) $$a_\nu = G(\nu),$$

wo $G(x)$ eine ganze Funktion mit folgender Eigenschaft bedeutet:

Wenn $\varepsilon\,(>0)$ beliebig klein vorgegeben ist, so läßt sich stets ein r' so bestimmen, daß für $r > r'$

(3) $$|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$$

ist).*

$F(x)$ kann man sich als eine beständig konvergente Potenzreihe von $\frac{1}{1-x}$ gegeben denken; etwas bequemer für das folgende ist es $F(x)$ als ganze Funktion von $\frac{x}{1-x}\left(= \frac{1}{1-x} - 1\right)$ vorauszusetzen:

(4) $$F(x) = e_1 \frac{x}{1-x} + e_2 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots \quad \left(\lim \sqrt[\nu]{|e_\nu|} = 0\right).$$

Die Koeffizienten a_ν der Entwickelung (1) um den Nullpunkt berechnen sich folgendermaßen aus den e_i:

(5) $$a_\nu = e_1 + \binom{\nu-1}{1} e_2 + \binom{\nu-1}{2} e_3 + \cdots + \binom{\nu-1}{\nu-1} e_\nu \text{**}).$$

Ich betrachte nun folgenden Ausdruck:

(6) $$\Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} e_3 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e_4 + \cdots$$

und behaupte $\Phi(x)$ ist die durch unser Theorem verlangte ganze Funktion; dazu sind folgende drei Punkte zu beweisen:

1) $\Phi(x)$ ist eine ganze Funktion: $\Phi(x) = G(x)$;
2) $G(\nu) = a_\nu$;
3) $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$ (für beliebiges ε und $r > r'$).

Bezüglich des ersten Punktes beweise ich, das $\Phi(x)$ für $|x| < R$ (R beliebig groß) gleichmäßig konvergiert. Zu dem Zwecke schreibe ich

$$\Phi(x) = e_1 + \frac{x-1}{1} e_2 + \cdots + \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{(n-1)!} e_n + \Phi_n(x)$$

---

*) Falls $x = 1$ eine *außerwesentlich* singuläre Stelle n^{ter} Ordnung ist, reduziert sich $G(\nu)$ bekanntlich auf ein Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, und umgekehrt.

**) Umgekehrt ist $e_{i+1} = \Delta^i a_1 = a_{i+1} - \binom{i}{1} a_{i-1} + \cdots + (-1)^i a_1$. Daraus und aus dem Theorem I folgt ganz beiläufig, daß $\lim \sqrt[\nu]{|\Delta^\nu a_1|} = 0$ ist, falls $a_\nu = G(\nu)$ und $|G(re^{i\varphi})| < e^{\varepsilon r}$ ist. Mit dem Beweise des reziproken Satzes sind wir oben gerade beschäftigt.

und zeige, daß $|\Phi_n(x)|$ für $|x| < R$ beliebig klein wird, wenn nur n groß genug gewählt ist. Zunächst bestimme ich eine Zahl m' so, daß für $m > m'$, wenn $\varepsilon \begin{pmatrix} > 0 \\ < 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist,

$$|e_m| < \varepsilon^m$$

wird. Dann ist, falls $n > m'$,

$$|\Phi_n(x)| < \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n)}{n!}\varepsilon^n + \frac{(R+1)(R+2)\cdots(R+n+1)}{(n+1)!}\varepsilon^{n+1} + \cdots.$$

Was hier auf der rechten Seite steht, ist der Rest vom n^{ten} Gliede ab der konvergenten Entwickelung von $\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{R+1}$ nach Potenzen von ε, kann also durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden, womit der erste Punkt erledigt ist.

Der zweite ist evident, wie ein Blick auf die unter einander stehenden Formeln (5) und (6) lehrt.

Der dritte Punkt ergibt sich folgendermaßen:

$$|\Phi(re^{i\varphi})| < |e_1| + \frac{r+1}{1}|e_2| + \frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot 2}|e_3| + \cdots$$

$$< |e_1| + \frac{r+1}{1}|e_2| + \cdots + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m-1)}{(m-1)!}|e_m| +$$

$$+ \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}{m!}\varepsilon^m + \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m+1)}{(m-1)!}\varepsilon^{m+1} + \cdots$$

(wenn wieder $|e_m| < \varepsilon^m$ für $m > m'$)

$$< \frac{1}{(1-\varepsilon)^{r+1}} + P(r), \text{ wo } P(r) \text{ ein Polynom } (m-1)^{\text{ten}} \text{ Grades in } r \text{ bedeutet,}$$

$$= e^{-(r+1)\lg(1-\varepsilon)} + P(r),$$

$$< e^{(r+1)\varepsilon'} + P(r), \text{ wo } \varepsilon', \text{ wie auch nachher } \varepsilon'' \text{ mit } \varepsilon \text{ beliebig klein wird, diese Ungleichung gilt noch für jedes } r;$$

$$< e^{\varepsilon'' r}, \text{ wenn } r \text{ genügend groß gewählt ist.}$$

Hiermit ist aber der in Rede stehende Satz völlig bewiesen.

Auf die anderen obigen Sätze, bei denen es sich um Funktionen mit mehreren oder unendlich vielen singulären Stellen handelte, angewandt, besagt das letzte Theorem, daß die dort in den Koeffizienten a_ν auftretenden ganzen Funktionen $G_1, G_2, \cdots$ die allgemeinsten sind, welche zu wesentlich singulären Stellen Veranlassung geben. Man hat also beispielsweise den Satz:

Sind unendlich viele ganz beliebige ganze Funktionen $g_1, g_2, \cdots$ gegeben und unendlich viele Stellen $x_1, x_2, \cdots$ ($\lim x_\nu = \infty$), so existiert stets eine eindeutige mit Ausnahme der Punkte x_i und des Punktes ∞

reguläre analytische Funktionen $F(x)$ von der Eigenschaft, daß die Differenz

$$F(x) - g_i\left(\frac{1}{x - x_i}\right)$$

sich auch an der Stelle x_i regulär verhält. Lautet die Entwickelung dieser Funktion um den Nullpunkt $F(x) = \sum a_\nu x^\nu$, so kann man setzen:

$$a_\nu = \frac{1}{x_1^\nu} G_1(\nu) + \frac{1}{x_2^\nu} G_2(\nu) + \cdots + \frac{1}{x_{l_\nu}^\nu} G_{l_\nu}(\nu) + a_\nu'.$$

Es bestehen dabei die Bedingungen (17) p. 34 und (2) p. 31, und es ist $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu'|} = 0$. (Eine in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Punkte x_i giltige Darstellung von $F(x)$ gestattet bekanntlich das Mittag-Lefflersche Theorem.)

Beispiele: Die ganzen Funktionen von x

$$\frac{\sin \pi \sqrt{x}}{\pi \sqrt{x}} \quad \text{und} \quad (\sin \pi \sqrt{x})^2$$

erfüllen die Bedingung (2) p. 31; daher stellen die Reihen

$$\sum_0^\infty \frac{\sin \pi \sqrt{\nu}}{\pi \sqrt{\nu}} x^\nu \quad \text{und} \quad \sum_0^\infty (\sin \pi \sqrt{\nu})^2 x^\nu$$

Funktionen dar, die auf dem Konvergenzkreise und überhaupt nur die eine singuläre Stelle $x = 1$ besitzen. Dieselben sind wegen ihrer Einfachheit besonders geeignet zur Illustrierung der zuerst von Herrn Hadamard*) gegenüber gegenteiligen Vermutungen durch Konstruktion eines komplizierteren Beispiels gezeigten Tatsache, daß ein $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ nicht zu existieren braucht, selbst wenn die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ nur eine einzige singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreise hat. Da in den obigen Beispielen unendlich viele der a_ν gleich Null sind, existiert nicht einmal ein $\lim \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$.

§ 3.

Ich wende mich nunmehr zu dem oben angekündigten elementaren Beweise des Hadamardschen Satzes über die *Abhängigkeit der Singularitäten der Funktion*

$$F_1(x) = \sum a_\nu \int_0^1 V(t) t^\nu \, dt \, x^\nu \tag{1}$$

*) Journ. de Math. (4) 8 (1892) p. 163, la série de Taylor p. 65.

von denjenigen der Funktion

$$F(x) = \sum a_\nu x^\nu \text{ *).} \tag{2}$$

Von jedem singulären Punkte α_i dieser letzteren Funktion denke ich mir eine Gerade ins Unendliche gezogen, deren Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde. Die sämtlichen Punkte dieser Strahlen werden aus dem Bereiche der Variablen x ausgeschieden. In dem übrig bleibenden „Sterne“ (nach der Bezeichnungsweise des Herrn Mittag-Leffler) ist $F(x)$ regulär und eindeutig. Es ist zu beweisen, daß das gleiche auch von $F_1(x)$ gilt.

Genauer gesagt, führe ich den Beweis nicht für den Stern, sondern was auf dasselbe hinausläuft für ein folgendermaßen definiertes Gebiet S:

Von dem Sterne werde zuerst das unendliche Gebiet außerhalb eines um den Nullpunkt beschriebenen Kreises mit dem beliebig großen Radius R ausgeschlossen; ferner möge jeder der von den singulären Punkten α_i ausgehenden Strahlen um die Strecke ε über α_i hinaus gegen den Nullpunkt verlängert und dann vom Nullpunkt als Scheitel aus um den Winkel ε nach beiden Seiten gedreht werden. Das so von den Halbstrahlen überstrichene Gebiet werde ebenfalls eliminiert; was danach vom Sterne noch übrig bleibt, möge unser Gebiet S sein.

Es soll gezeigt werden, daß in diesem Gebiete die Taylorsche Reihe

$$F_1(x) = \sum a_\nu' x^\nu, \quad \text{wo} \quad a_\nu' = a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt \tag{1}$$

ist, sich eindeutig fortsetzen läßt.

Vorausgesetzt wird nur, daß $\int_0^1 V(t)\, dt$ absolut konvergiert (falls $a_0 = a_1 = \cdots = a_{\varkappa-1} = 0$ ist, genügt die absolute Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\, t^\varkappa\, dt$); auch wird der Einfachheit halber zunächst angenommen, daß $V(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ unter einer endlichen Grenze G bleibt.

Ich definiere nun folgende Reihe von Funktionen:

$$\begin{aligned} h_0 &= V(0)\, F(0), \\ h_1(x) &= \frac{1}{2}\left(V(0)\, F(0) + V\left(\frac{1}{2}\right) F\left(\frac{x}{2}\right)\right), \quad \text{allgemein} \\ h_i(x) &= \frac{1}{2^i} \sum_0^{2^i-1} V\left(\frac{\nu}{2^i}\right) F\left(\frac{\nu x}{2^i}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

*) Hadamard, Journ. de Math. (8) 1892, p. 163.

und sodann:

$$f_0 = h_0,$$
$$f_i(x) = h_i(x) - h_{i-1}(x) \qquad (i>0). \tag{4}$$

Jedes einzelne f ist ersichtlich eine in S reguläre analytische Funktion, ich behaupte, daß das gleiche von

$$\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(x) \tag{5}$$

gilt und beweise zu dem Zwecke, daß diese Reihe (5) für alle in S gelegenen x gleichmäßig konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n+1}^{n+r}{}_\nu f_\nu(x) &= h_{n+r}(x) - h_n(x) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^{n+r}-1}{}_\nu V\left(\frac{\nu}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\nu x}{2^{n+r}}\right) - \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1}{}_\mu V\left(\frac{\mu}{2^n}\right) F\left(\frac{\mu x}{2^n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1}{}_\mu \left\{ \sum_0^{2^r-1}{}_\nu \left(V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right) F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\right)\right\} \qquad (6) \\
&= \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1}{}_\mu \sum_0^{2^r-1}{}_\nu V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right)\left[F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1}{}_\mu \sum_0^{2^r-1}{}_\nu F\left(\frac{\mu 2^r x}{2^{n+r}}\right)\left[V\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}}\right) - V\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}}\right)\right]
\end{aligned}$$

$\sum_{n+1}^{n+r}{}_\nu f_\nu(x)$ ist somit in zwei Doppelsummen zerlegt, von denen jede einzeln, wie gezeigt werden soll, durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann, und zwar gleichmäßig für alle x von S und für $r = 1, 2, \cdots$ in inf.

Die erste Doppelsumme ist ihrem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{G}{2^{n+r}} \sum_0^{2^n-1}{}_\mu \sum_0^{2^r-1}{}_\nu \left(F\left(\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x\right) - F\left(\frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x\right)\right). \tag{7}$$

Setzt man

$$\frac{\mu 2^r+\nu}{2^{n+r}} x = y_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\mu 2^r}{2^{n+r}} x = y_\mu,$$

so liegen sämtliche Punkte $y_{\mu\nu}$ und y_μ in S und es ist für alle in Betracht kommenden Werte von μ und ν

$$|y_{\mu\nu} - y_\mu| < \frac{|x|}{2^n} < \frac{R}{2^n} < \delta \tag{8}$$

d. h. beliebig klein bei passender Wahl von n; dann kann aber auch wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F in S

$$(9) \qquad |F(y_{\mu\nu}) - F(y_\mu)| \qquad - \; 0 \leqq \mu < 2^n;\; 0 \leqq \nu < 2^r \; -,$$

also auch

$$(10) \qquad G|F(y_{\mu\nu} - F(y_\mu)|,$$

mithin der Ausdruck (7) durch Wahl von n unter jede Grenze herabgedrückt werden.

Somit ist die Behauptung, was die erste Doppelsumme betrifft, erwiesen.

Was die zweite betrifft, so bedeute $D(t_1, t_2)$ die Schwankung von $V(t)$ im Intervalle (t_1, t_2) und G_1 das Maximum von $|F(x)|$ in S, dann wird die zweite Summe kleiner als

$$(11) \qquad \frac{G_1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}_\nu D\left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right).$$

Dieser Ausdruck kann aber wegen der vorausgesetzten Existenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden.

Somit ist bewiesen, daß $\sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x)$ in S gleichmäßig konvergiert, also daselbst eine reguläre analytische Funktion darstellt, und daß jeder Koeffizient der Entwickelung dieser Funktion um den Nullpunkt gleich der Summe der entsprechenden Koeffizienten der Funktionen $f_\nu(x)$ ist.

Der Koeffizient a'_m von x^m wird z. B.:

$$(12) \qquad a'_m = \lim_{n=\infty} \frac{a_m}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}_\nu V\left(\frac{\nu}{2^n}\right)\left(\frac{\nu}{2^n}\right)^m;$$

dies ist der Definition nach $a_m \int_0^1 V(t)\,t^m\,dt$, falls dieses Integral existiert dies tritt aber immer ein, wenn, wie vorausgesetzt, $\int_0^1 V(t)\,dt$ existiert.

Wir haben somit gesehen:

Die in S reguläre analytische Funktion

$$\sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x)$$

hat um den Nullpunkt die Entwickelung:

$$\sum_0^\infty {}_\nu a_\nu' x^\nu - a_\nu' = a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt -,$$

und diese Taylorsche Reihe läßt sich also über das ganze Gebiet S, mithin über den ganzen Mittag-Lefflerschen Stern analytisch fortsetzen.

Statt die Teilstrecken $\left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n}\right)$ — $\lim n = \infty$ — auf der Strecke (0, 1) auszuzeichnen, hätte man natürlich unendlich viele andre das gleiche leistende Teilungen vornehmen können. Man hätte dann entsprechend den Funktionen $f_0, f_1, \cdots$ andre Funktionen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots$ einzuführen gehabt; $\sum_0^\infty {}_\nu \varphi_\nu(x)$ wäre auch eine in S reguläre analytische Funktion gewesen, die mit $\sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x)$ identisch gewesen wäre, da die beiderseitigen Entwickelungen um den Nullpunkt übereinstimmen. Daraus schließt man

$$\sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x) = \int_0^1 V(t)\, F(tx)\, dt$$

(unabhängig von der benutzten Einteilung).

Nachträglich lassen sich nun folgende zwei Erweiterungen an dem Satze anbringen:

1) unter geeigneten Voraussetzungen über den analytischen Charakter von $V(t)$ können die geradlinigen Einschnitte durch andere ersetzt werden; man beweist dies, indem man die Integration von 0 bis 1 auf komplexem Wege ausführt; s. darüber Hadamard a. a. O.

2) $V(t)$ braucht nicht unter einer endlichen Grenze zu bleiben.

Um den letzteren Punkt zu beweisen gehen wir wieder auf die Definition des bestimmten Integrals zurück und nehmen sogleich den allgemeinsten Fall an, daß die singulären Stellen von $V(t)$, d. h. diejenigen, über die direkt nicht integriert werden kann, eine abgeschlossene Menge bilden.

Man betrachtet dann Bereiche $D_0, D_1, D_2, \cdots$, von denen jeder aus einer Summe von Teilstrecken der Strecke $\overline{01}$ besteht und keiner einen singulären Punkt von $V(t)$ enthält; dagegen soll D_ν die sämtlichen Bereiche $D_0, D_1, \cdots, D_{\nu-1}$ umfassen, und irgend ein nicht singulärer Punkt t soll schließlich einem D_n, also auch $D_{n+1}, D_{n+2}, \cdots$ angehören.

Wenn n genügend groß gewählt ist, wird also der Inhalt der Menge $\delta_{n,n+r}$ derjenigen Punkte, die zu D_{n+r}, nicht aber zu D_n gehören, so klein als man nur will, und die notwendige und hinreichende Bedingung

für die absolute Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ ist, daß man zu jedem ε ein n bestimmen kann, daß

$$\int_{D_{n+r}} |V(t)|\,dt - \int_{D_n} |V(t)|\,dt < \varepsilon, \tag{13}$$

oder anders geschrieben

$$\int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)|\,dt < \varepsilon \tag{14}$$

wird (für $r = 1, 2, \cdots$ und wie auch die den obigen Bedingungen genügenden Bereiche D im übrigen gewählt sein mögen).

Dies vorausgeschickt betrachten wir die Reihe von Ausdrücken:

$$F_i(x) = \int_{D_i} V(t)\,F(tx)\,dt \qquad (i = 0, 1, \cdots), \tag{15}$$

von denen jeder, wie vorhin (p. 39ff.) gezeigt wurde, eine in S reguläre analytische Funktion darstellt. Setzt man

$$\begin{aligned} &\psi_0(x) = F_0(x), \\ &\psi_i(x) = F_i(x) - F_{i-1}(x) \qquad (i > 0), \end{aligned} \tag{16}$$

so ist, wenn wieder G_1 das Maximum von $|F(x)|$ in S bedeutet:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| &= |F_{n+r}(x) - F_\nu(x)| = \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\,F(tx)\,dt \right| \\ &< G_1 \int_{\delta_{n,n+r}} |V(t)|\,dt, \end{aligned} \tag{17}$$

also nach (14)

$$\left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| < G_1\,\varepsilon, \tag{18}$$

d. h. beliebig klein mit wachsendem n für alle x in S.

Aus der so bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_0^\infty \psi_\nu(x)$ schließt man genau wie oben, daß

$$\sum_0^\infty \psi_\nu(x) = \int_0^1 V(t)\,F(tx)\,dt$$

eine in S reguläre analytische Funktion ist, deren Potenzentwickelung um den Nullpunkt lautet:

$$\sum_0^\infty a_\nu \int_0^1 V(t)\, t^\nu\, dt\, x^\nu.$$

Man bemerke übrigens, daß erst bei diesem letzten Beweise für die gleichmäßige Konvergenz von $\sum \psi_\nu(x)$ von der Voraussetzung der *absoluten* Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\, dt$ Gebrauch gemacht wurde; in Wirklichkeit ist die Voraussetzung unnötig und es genügt die Existenz von $\int_0^1 V(t)\, dt$*), was ich zum Schlusse in Kürze zeigen will, indem ich Ungleichung (18) unter dieser erweiteten Voraussetzung beweise.

Es sei unter Trennung des Reellen und Imaginären $x = \xi + i\eta$ ein Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von S und

$$F(tx) = u(t\xi, t\eta) + iv(t\xi, t\eta); \tag{19}$$

wenn nun t zwischen 0 und 1 variiert, so läßt sich zeigen, daß die Anzahl der Monotoniewechsel der Funktion u und der Funktion v unter einer endlichen Zahl N bleiben, die unabhängig von der besonderen Lage des Punktes $\xi + i\eta$ ist; dann erhält man aber unter Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^{n+r} \psi_\nu(x) \right| &= \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\, u(t\xi, t\eta)\, dt + i \int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\, v(t\xi, t\eta)\, dt \right| \\ &< \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\, u(t\xi, t\eta)\, dt \right| + \left| \int_{\delta_{n,n+r}} V(t)\, v(t\xi, t\eta)\, dt \right| \qquad (20) \\ &< 4NG_1 \left| \int_{\delta'_{n,n+r}} V(t)\, dt \right| **), \end{aligned}$$

*) Selbst diese ist nicht nötig, da die obigen Entwickelungen sämtlich gültig bleiben, wenn man statt des Integrals das obere oder das untere Integral einsetzt; auch genügt bei Unendlichkeitsstellen von $V(t)$ die Konvergenz des Integrals bei bestimmter Art des Grenzübergangs, z. B. die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes; nur ist dann auch in den andern auftretenden Integralen der gleiche Grenzübergang auszuführen.

**) $\delta'_{n,n+r}$ bedeutet dabei einen innerhalb $\delta_{n,n+r}$ gelegenen Bereich.

was wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\int_0^1 V(t)\,dt$ mit unendlich werdendem n verschwindet, q. e. d.

Der vorstehende Beweis mag vielleicht durch die nötig werdenden Bezeichnungen etwas umständlich erscheinen; doch ist der demselben zu grunde liegende Gedanke — Zurückgehen auf die Definition des bestimmten Integrals und Anwendung des Doppelreihensatzes — ein äußerst einfacher und läßt sich leicht auf andere Sätze übertragen, beispielsweise auf den folgenden des Herrn Hadamard*):

Sind $a(x) = \sum a_\nu x^\nu$ und $b(x) = \sum b_\nu x^\nu$ Elemente zweier analytischer Funktionen mit den singulären Stellen α resp. β, so hat die durch die Reihe $\sum a_\nu b_\nu x^\nu$ definierte analytische Funktion in der ganzen Ebene keine andern singulären Stellen als unter den Punkten $\alpha \cdot \beta$

Beweis: C sei eine möglicherweise aus mehreren getrennten Stücken bestehende die Punkte 0 und ∞ vermeidende Kurve von der Art, daß $a(z)$ eindeutig und unter einer endlichen Grenze bleibt, wenn z auf C läuft; S sei ein zusammenhängendes den Nullpunkt enthaltendes Gebiet der Art, daß, falls x in S und z auf C variiert, $b\left(\frac{x}{z}\right)$ sich regulär verhält. Dann beweist man ganz ebenso wie den vorigen Satz, daß das Integral

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C a(z)\, b\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} \tag{2}$$

eine in S reguläre analytische Funktion von x darstellt.

Die Funktion $J(x)$ hängt natürlich von der Kurve C ab; speziell bestehe C aus folgenden Stücken:

1) aus einem beliebig großen Kreise mit dem Radius R;
2) jeder singuläre Punkt α_i von $a(x)$, der innerhalb dieses Kreises liegt, werde durch einen beliebig kleinen Kreis K_{α_i} ausgeschlossen; ferner werde ein Punkt von K_{α_i} durch eine beliebige nicht durch den Nullpunkt gehende Kurve C_{α_i} mit dem unter (1) genannten Kreise verbunden.

Die Kurven C_α mögen der Einfachheit halber als einander ähnliche logarithmische Spiralen mit dem Nullpunkte als Pol gedacht werden.

Hat die Funktion $b(x)$ nur die eine singuläre Stelle $x = \beta$, so erhält man das oben definierte Gebiet S, in welchem $b\left(\frac{x}{z}\right)$ regulär ist, während z auf der Kurve C läuft, indem man die Punkte $x = \beta \cdot z$ ausschließt.

*) acta math. 22 (1898); wie der Ausdruck „in der ganzen Ebene“ zu verstehen ist, ergibt sich aus dem Beweise.

Die ausgeschlossenen Punkte liegen auf einer Kurve C, welche aus der obigen C durch eine Ähnlichkeitstransformation verbunden mit einer Drehung um den Nullpunkt entsteht.

Das Gebiet S besteht also aus dem Innern eines Kreises mit dem Radius $|\beta|R$, ausgenommen kleine Kreise $K_{\alpha\beta}$ um die Punkte $\alpha\beta$ und die den obigen Kurven C_α ähnlichen $C_{\alpha\beta}$*).

Hat die Funktion $b(x)$ mehrere singuläre Punkte $(|\beta_1| \leqq |\beta_2| \leqq \cdots)$ so konstruiere man für jeden das analoge Gebiet und bezeichne mit S dasjenige, das allen diesen gemeinsam ist; dasselbe ist offenbar begrenzt von einem Kreise mit dem Radius $|\beta_1|R$, von den Kreisen $K_{\alpha\beta}$ und den Kurven $C_{\alpha\beta}$ $(|\alpha\beta| < \beta_1 R)$.

Beachtet man, daß die logarithmischen Spiralen C_α auf unendlich viele verschiedene Weisen gewählt werden dürfen, und daß ganz unabhängig von dieser Wahl die Entwickelung von $J(x)$ nach steigenden Potenzen von x lautet:

$$J(x) = \sum a_\nu b_\nu x^\nu \quad \text{(nach dem Cauchyschen Satze)}, \tag{3}$$

so ist der in Rede stehende Satz bewiesen, nämlich, daß die durch die Reihe (1) definierte Funktion $F(x)$ im Endlichen keine anderen Singularitäten hat als die Stellen $\alpha\beta$. Nur ist zu bemerken, daß das Gebiet S stets schlicht ist und nach Voraussetzung stets den Nullpunkt enthält, um welchen die Entwickelung (3) gilt. Man wird daher über das, was an den Nullpunkten in den übrigen Blättern der im allgemeinen mehrdeutigen Funktion $F(x)$ geschieht, nichts aussagen können; dieselben können wohl singuläre Stellen sein**) wie folgendes Beispiel lehrt:

$$a(x) = b(x) = \sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu} = \lg \frac{1}{1-x}$$

hat im Endlichen die eine singuläre Stelle $x = 1$; dagegen hat

$$\sum_1^\infty \frac{x^\nu}{\nu^2} = \int_0^x \frac{\lg \frac{1}{1-x}}{x}\, dx$$

außerdem die singuläre Stelle $x = 0$ in den andern Zweigen der Funktion.

Ähnliche Sätze wie der vorhergehende lassen sich noch mehr auf-

*) Sind weder α_i noch β Verzweigungspunkte, so bedarf es nicht der Kurven C_{α_i} und $C_{\alpha_i\beta}$.

**) Cf. Borel, Bull. de la Soc. Math. de France 26 (1898).

stellen und in ähnlicher Weise beweisen; besonders interessant ist darunter der folgende von Herrn Hurwitz herrührende:

Sind durch $A(z) = \sum \frac{a_\nu}{z^{\nu+1}}$ und $B(z) = \sum \frac{b_\nu}{z^{\nu+1}}$ zwei analytische Funktionen definiert mit den singulären Stellen α resp. β, so hat die Funktion

$$C(z) = \sum \frac{c_\nu}{z^{\nu+1}},$$

wo

$$c_\nu = a_0 b_\nu + \binom{\nu}{1} a_1 b_{\nu-1} + \binom{\nu}{2} a_2 b_{\nu-2} + \cdots + a_\nu b_0$$

ist, ihre singulären Stellen unter den Punkten $\alpha + \beta$.

Bezüglich des Beweises s. Hurwitz, Compt. rend. 6 févr. 1899 und dell' Agnola Atti del Ist. Ven. 14 mai 1899.

Ich verlasse nun die Betrachtungen dieser Art und wende mich zu den in der Einleitung angekündigten polynomischen Entwickelungen.

III. Abschnitt.

Über polynomische Entwickelungen.

§ 1.

Während im ersten Abschnitte Entwickelungen der Form $\sum a_\nu(\psi(x))^\nu$ das Ziel der Untersuchung bildeten, und für Funktionen mit sehr allgemeinen Regularitätsbereichen die Möglichkeit derartiger Entwickelungen bewiesen wurde, sollen nunmehr ähnliche Sätze über Entwickelungen der Form

$$\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) \tag{1}$$

abgeleitet werden; $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x), \cdots$ bedeutet dabei eine unendliche Reihe von Polynomen ($P_i(x)$ vom i^{ten} Grade; $P_0 = -1$); *und zwar sollen die Koeffizienten der Potenzen von x in jenen Polynomen ausschließlich von dem betrachteten Regularitätsbereiche S, dagegen die a_ν von der besonderen Wahl der zu entwickelnden Funktion abhängen**).

Ist der zu betrachtende Regularitätsbereich ein Kreis mit dem Mittelpunkte $x = a$, so konnte man im ersten Abschnitte $\psi(x) = (x-a)$ setzen; auch jetzt wird sich für das Innere eines Kreises als Regularitätsbereich $P_\nu(x)$ auf $(x-a)^\nu$ reduzieren. In dieser Hinsicht berühren sich also die nunmehr zu gebenden Entwickelungen mit denjenigen des ersten Abschnitts. Auch die Methoden der Beweisführung bleiben ähnliche: Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes und Einführung neuer Variabler in das Differential $\frac{dz}{z-x}$ mit Hilfe der konformen Abbildung.

Die das einfach zusammenhängende Gebiet S, in welchem die polynomischen Reihen konvergieren sollen, begrenzende Kurve C möge zunächst als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt werden.

---

*) Sätze, die sich mit den folgenden teilweise berühren, hat Herr Painlevé am 24. Jan. 1898 der französ. Akademie ohne Beweis mitgeteilt; vgl. a. Runge, acta math. 6 (1885); Hilbert, Gött. Nachr. 1897.

Es sei nun

$$z = \psi(\tau) \tag{2}$$

eine Funktion, welche das unendliche Gebiet der z-Ebene außerhalb C auf das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene abbildet, und zwar so, daß dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $\tau = 0$ entspricht. Die Funktion $\psi(\tau)$ hat demnach einen einfachen Pol im Nullpunkte, verhält sich aber sonst regulär im Einheitskreise; $\psi(\tau)$ läßt sich also darstellen in der Form:

$$z = \psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau), \tag{3}$$

wo $\mathfrak{P}(\tau)$ eine Potenzreihe von τ mit nur positiven Potenzen bedeutet, die für $|\tau| < 1$ konvergiert. Da wir aber die Kurve C als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt haben, kann $\mathfrak{P}(\tau)$ auf dem Einheitskreise keinen singulären Punkt haben*); es konvergiert daher $\mathfrak{P}(\tau)$ für $|\tau| < 1 + \varrho_1$ $(0 < \varrho_1)$, und es läßt sich ein ϱ $(0 < \varrho \leqq \varrho_1)$ angeben, sodaß, falls $\sigma < \varrho$ ist den Kreisen

$$|\tau| = 1 + \sigma$$

der τ-Ebene in der z-Ebene geschlossene Kurven $C_{1+\sigma}$ ohne Doppelpunkt entsprechen, die ganz innerhalb $C (= C_{1+0})$ verlaufen. (Den Kreisen $|\tau| = 1 - \sigma'$ $(0 < \sigma' < 1)$ entsprechen ganz außerhalb C verlaufende Kurven $C_{1-\sigma'}$.)

Falls $F(x)$ eine im Innern von S reguläre Funktion bedeutet, ist nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{F(z)}{z - x}\, dz \tag{4}$$

für jeden Punkt im Innern von C', falls C' seinerseits wieder ganz innerhalb S verläuft; für C' werde eine der obigen Kurven $C_{1+\sigma}$ gewählt. Das Integral auf der rechten Seite von (4) transformiert man, indem man für z aus (2) $\psi(\tau)$ einsetzt, dadurch geht (4) über in

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau; \tag{5}$$

Die Integration ist zu erstrecken in der τ Ebene über die Peripherie des Kreises $|\tau| = 1 + \sigma$ und zwar im Sinne des Uhrzeigers.

Ehe ich auf diese Formel zurückkomme, schalte ich eine Untersuchung der in (5) unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion τ und x:

*) S. die Anm. *) p. 11.

(6) $$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}$$

ein. Es ist dies die erzeugende Funktion für unsere Polynome, welche bei der Entwickelung von (6) nach Potenzen von τ als Koeffizienten auftreten. $\psi(\tau)$ wird nie gleich x, solange, wie vorausgesetzt werden möge, x innerhalb C_ω $(0<\omega<1+\varrho)$ und $|\tau|<\omega$ bleibt*). Im Punkte $\tau=0$ hat $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$ einen Pol zweiter Ordnung, während $\frac{1}{\psi(\tau)-x}$ dort von der ersten Ordnung Null wird; demnach hat der Ausdruck (6), als Funktion von τ betrachtet einen einfachen Pol im Nullpunkte — und zwar mit dem Residuum -1 —, ist aber im übrigen regulär mindestens in einem mit dem Radius ω um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Man hat daher die in diesem Kreise gültige Entwickelung:

(7) $$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}=-\frac{1}{\tau}+\sum_0^\infty{}_\nu P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu.$$

Es ist leicht zu zeigen, daß P_ν ein Polynom ν^{ten} Grades in x ist; wenn nämlich allgemein $\mathfrak{P}(\tau)$, $\mathfrak{P}_1(\tau)$, $\mathfrak{P}_2(\tau)$, $\cdots$ nur positive Potenzen enthaltende Potenzreihen von τ bedeuten, so ist:

(8) $$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}=\left(-\frac{a}{\tau^2}+\mathfrak{P}_1(\tau)\right)\cdot\frac{1}{\frac{a}{\tau}+\mathfrak{P}(\tau)-x}$$

$$=-\frac{1}{\tau}+\frac{\tau\mathfrak{P}_1(\tau)+\mathfrak{P}(\tau)-x}{a+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x}=-\frac{1}{\tau}+\frac{\mathfrak{P}_2(\tau)-x}{a+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x}.$$

In dem Nenner auf der rechten Seite von (8) kommt x einmal mit τ multipliziert, sonst aber nicht mehr vor; entwickelt man daher $\frac{1}{a+\tau\mathfrak{P}(\tau)-\tau x}$ nach Potenzen von τ, so enthält der Koeffizient von τ^μ als höchste Potenz von x die μ^{te}; multipliziert man noch mit dem Zähler $\mathfrak{P}_2(\tau)-x$, so steigt der nun entstehende Koeffizient von τ^μ i. e. $P_{\mu+1}(x)$ in x bis zum $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Grade an.

Die Anwendung des Cauchyschen Koeffizientensatzes auf die Reihe in (7) ergibt, falls G eine bestimmte endliche Zahl bedeutet, und die Bedingung $0<\omega'<\omega<1+\varrho$ erfüllt ist, für alle x innerhalb und auf C_ω:

(9) $$|P_{\nu+1}(x)|<\frac{G}{(\omega')^\nu}.$$

---

*) Es sei nochmals daran erinnert, daß C_ω diejenige Kurve der x-Ebene bedeutet, welche vermöge der Relation $x=\psi(t)$ dem um den Nullpunkt der t-Ebene mit dem Radius ω beschriebenen Kreise K_ω entspricht.

Daraus folgt schon, daß die Reihe auf der rechten Seite von (7) für alle x innerhalb und auf C_ω und für alle τ, die der Bedingung

$$0 \leqq |\tau| \leqq \omega' < \omega$$

genügen, *gleichmäßig* konvergiert; hiervon werden wir später bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes Gebrauch machen.

Zu einer in gewisser Hinsicht genaueren Aussage, als sie in Ungleichung (9) enthalten ist, und zugleich zu einer *unteren* Grenze für $|P_\nu(x)|$ gelangt man folgendermaßen:

Man betrachte in dem Gebiete $|t| < 1 + \varrho$, $|\tau| < 1 + \varrho$ die Funktion der beiden unabhängigen Variabeln t und τ:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)}. \tag{10}$$

Gibt man der Variablen τ einen endlichen festen Wert, dem absoluten Betrage nach $< 1 + \varrho$, so hat (10) als Funktion von t betrachtet, im Punkte $t = \tau$ einen einfachen Pol, während die Funktion von t:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} \tag{10b}$$

für irgend ein τ $(0 < |\tau| < 1 + \varrho)$ und alle $|t| < 1 + \varrho$ regulären Verhaltens ist.

In ihrer Abhängigkeit von τ betrachtet ist die Funktion (10b) überall regulär außer im Nullpunkte, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum -1 hat, was auch t sein möge $(0 < |t| < 1 + \varrho)$. Die Funktion der zwei Variabeln t und τ

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau} \tag{10c}$$

ist daher regulär in dem Kontinuum $|\tau| < 1 + \varrho$, $|t| < 1 + \varrho$*), also eine nur positive Potenzen enthaltende Reihe

$$\mathfrak{P}(t, \tau) = \sum_0^\infty{}_\mu \mathfrak{P}_{\mu+1}(t)\, \tau^\mu; \tag{10d}$$

es ist also

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(t, \tau). \tag{11}$$

Setzt man ferner $|t| > |\tau|$ voraus, so gilt die Entwickelung:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty{}_\mu \left(-\frac{1}{t^{\mu+1}} + \mathfrak{P}_{\mu+1}(t) \right) \tau^\mu. \tag{12}$$

*) Bedenken könnte nur noch der Punkt $t = \tau = 0$ erregen; diese fallen aber weg, da bei Funktionen mehrerer Variabler isolierte Singularitäten nicht auftreten können.

Substituiert man hier auf der linken Seite x für $\psi(t)$ — x ist ein Punkt außerhalb $C_{1+\varrho}$ —, und vergleicht die Potenzen von τ in dieser Entwickelung mit derjenigen der oben gefundenen Formel:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\frac{1}{\psi(\tau)-x} = -\frac{1}{\tau} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} P_{\mu+1}(x)\tau^{\mu}, \tag{7}$$

so findet man

$$P_{\mu}(x) = -\frac{1}{t^{\mu}} + \mathfrak{P}_{\mu}(t) \quad (0<|t|<1+\varrho;\ x \text{ außerhalb } C_{1+\varrho}). \tag{13}$$

Da die Funktion $\mathfrak{P}(t,\tau)$ für alle $|t|<1+\varrho$, $|\tau|<1+\varrho$ regulären Verhaltens ist, so existiert für alle t und τ eines Bereiches T, der ganz innerhalb dieses Kontinuums liegt, eine endliche obere Grenze G, sodaß

$$|\mathfrak{P}(t,\tau)| < G \tag{14}$$

ist.

Man kann T so wählen, daß das Gebiet $|t|<1+\varrho'$, $|\tau|<1+\varrho'$, wenn nur $\varrho'<\varrho$, ganz innerhalb T liegt. Aus dem Cauchyschen Koeffizientensatze schließt man daher:

$$|\mathfrak{P}_{\mu}(t)| < \frac{G}{(1+\varrho')^{\mu}}. \tag{15}$$

Wenn ω um eine endliche Zahl kleiner als $1+\varrho$ ist, so kann man sich ϱ' so gewählt denken, daß auch $\omega<1+\varrho'<1+\varrho$ ist, daß also $\alpha = \frac{\omega}{1+\varrho'}$ ein echter Bruch ist. Dies vorausgesetzt folgt aus Gleichung (13) und Ungleichung (15) für alle x auf C_{ω}:

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^{\mu} - \frac{G}{(1+\varrho')^{\mu}} < |P_{\mu}(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\mu} + \frac{G}{(1+\varrho')^{\mu}} \tag{16}$$

oder

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^{\mu}(1-G\alpha^{\mu}) < |P_{\mu}(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^{\mu}(1+G\alpha^{\mu}). \tag{17}$$

Wählt man nun μ so groß, daß $G\alpha^{\mu}$ kleiner als $\delta\omega$ wird, wo δ eine gegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so erhält man, wenn man aus den drei Gliedern der Ungleichung (17) die μ^{te} Wurzel zieht und die für positive $\varepsilon<1$ giltigen Formeln $1-\varepsilon<(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\mu}}$; $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\mu}}<1+\varepsilon$ beachtet:

$$\frac{1}{\omega} - \delta < |P_{\mu}(x)|^{\frac{1}{\mu}} < \frac{1}{\omega} + \delta \tag{18}$$

d. h. aber

$$\lim_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|P_{\mu}(x)|} = \frac{1}{\omega} \quad \textit{gleichmäßig für alle } x \textit{ auf } C_{\omega}\ (0<\omega<1+\varrho). \tag{19}$$

Daneben beachte man Ungleichung (9), die sofort zur folgenden Aussage führt:

(20) $\overline{\lim_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|P_\mu(x)|} < \frac{1}{\omega}$ *für irgend ein* x *im Innern von* C_ω.

§ 2.

Es folgt nun eine Untersuchung von Reihen

(21) $$\sum a_\nu P_\nu(x).$$

Die Gleichung (19) und Ungleichung (20) zeigen schon, daß eine solche Reihe die wesentlichsten Konvergenzeigenschaften mit der Potenzreihe

$$\sum a_\nu x^\nu$$

gemein haben muß. Ich kann mich daher beim Beweise der folgenden Sätze kurz fassen, da dieselben großenteils nur Übertragungen von in der Theorie der Taylorschen Reihe geläufigen Schlüssen sind.

Es kommt vor allem auf den $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ an. Erreicht oder überschreitet derselbe den Wert $1+\varrho$, so läßt sich über die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ einstweilen gar nichts aussagen. Ist derselbe aber gleich ω, wo $\omega < 1+\varrho$ ist, so folgt aus den Relationen (19) und (20) sofort*):

Die Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ *konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Gebiete, das ganz innerhalb* C_ω *liegt und stellt also daselbst eine analytische Funktion dar; außerhalb* C_ω *divergiert* $\sum a_\nu P_\nu(x)$, *während sich über das Verhalten auf* C_ω *ohne spezielle Annahme über die* a_ν *keine Aussagen machen lassen* (genau wie bei der gewöhnlichen Potenzreihe).

Umgekehrt läßt sich auch jede innerhalb C_ω *reguläre analytische Funktion* $F(x)$ *in eine Reihe* $\sum a_\nu P_\nu(x)$ *entwickeln.*

Zum Beweise, der unter der Annahme $\omega = 1$ geführt werden möge, gehe man auf die Formel (5) p. 49 zurück:

(5) $$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

Nach dem p. 50 Bewiesenen konvergiert für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ vom absoluten Betrage $1+\sigma$ die Reihe

(7) $$\frac{1}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu$$

gleichmäßig.

*) cf. Hadamard, la série de Taylor p. 18.

Setzt man daher die Reihe auf der rechten Seite von (7) in (5) ein, so darf man gliedweise integrieren und erhält:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(x), \tag{22}$$

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} F(\psi(\tau))\, \tau^{\nu-1}\, d\tau \tag{23}$$

zunächst für alle x im Innern von $C_{1+\sigma}$; doch gilt die Entwickelung (22) auch für alle x im Innern von $C\ (= C_1)$; denn einerseits kann σ beliebig klein gewählt werden, andrerseits ist der Wert des Integrals (23) für a_ν unabhängig davon, über welchen Kreis $K_{1+\sigma}$ $(0 < \sigma < \varrho)$ es geführt wird; denn die Integranden sind in dem Kreisringe $1 < |\tau| < 1 + \varrho$ reguläre analytische Funktionen von τ.

Ferner behaupte ich: *Die innerhalb* C_ω $(0 < \omega < 1 + \varrho)$ *gültige Entwickelung*

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu P_\nu(x) \tag{22}$$

ist nur auf eine Weise möglich; d. h. besteht Gleichung (22) und gleichzeitig Gleichung:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu' P_\nu(x), \tag{22b}$$

so folgt daraus

$$a_\nu = a_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots). \tag{24}$$

Führt man in (22) und (22b) für x vermöge der Substitution

$$x = \psi(t) = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t) \qquad (\omega < |t| < 1 + \varrho)$$

die Variable t ein, wodurch $P_\nu(x)$ nach (13) p. 52 übergeht in $\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)$, so erhält man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (22) und (22b) die Identität:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu \left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right) = \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu' \left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right) \qquad (\omega < |t| < 1 + \varrho). \tag{25}$$

Beachtet man noch, daß die Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = \sum a_\nu \left(-\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

und

$$\sum a_\nu' P_\nu(x) = \sum a_\nu' \left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

im wesentlichen wie Potenzreihen, also jedenfalls für irgend welche t von gleichem zwischen ω und $1+\varrho$ liegenden absoluten Betrage *gleichmäßig* konvergieren, so lehrt der Weierstraßsche Doppelreihensatz, daß man die rechte und linke Seite von (25) je in eine Laurentsche Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu t^\nu \tag{26}$$

entwickeln darf, und da die Entwickelung in eine Laurentsche Reihe bekanntlich nur auf eine Weise möglich ist, müssen die Koeffizienten A_ν die gleichen sein, ob man nun durch Entwickelung der rechten oder der linken Seite von (25) zu (26) gelangt ist. Nun ergibt aber die linke Seite von (25)

$$\begin{aligned} A_{-\nu} &= -a_\nu, \quad \text{die rechte dagegen} \\ A_{-\nu} &= -a_\nu', \end{aligned} \tag{26b}$$

woraus die behauptete Identität $a_\nu = a_\nu'$ folgt.

Daraus schließt man weiter:

Die durch die im Innern von C_ω konvergente außerhalb divergente Entwickelung $\sum a_\nu P_\nu(x)$ dargestellte Funktion $F(x)$ hat auf C_ω mindestens eine singuläre Stelle. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre $F(x)$ im Innern einer C_ω ganz umschließenden Kurve $C_{\omega'}$ $(\omega' < \omega)$ regulär und könnte daher nach dem Satze p. 53 durch eine innerhalb $C_{\omega'}$ konvergente Reihe $\sum a_\nu' P_\nu(x)$ dargestellt werden, die nach dem vorigen Satze mit der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ identisch sein müßte, was der Voraussetzung, daß $\sum a_\nu P_\nu(x)$ nur im Innern von C_ω konvergiert, widerstreitet.

Die Ableitungen der Funktion $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ können durch gliedweise Differentiation erhalten werden:

$$F'(x) = \sum a_\nu P_\nu'(x); \qquad F''(x) = \sum a_\nu P_\nu''(x) \quad \text{usw.} \tag{27}$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{1+\sigma}} \frac{F(z)}{(z-x)^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi(\tau))}{(\psi(\tau)-x)^2} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

ist, und daß für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ auf $K_{1+\sigma}$ die Reihe

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{(\psi(\tau)-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau)-x}\right) = \sum \frac{dP_{\nu+1}(x)}{dx}\, \tau^\nu \tag{28}$$

gleichmäßig konvergiert. Man erhält daher für die Funktion $F'(x)$ eine

nach Polynomen $P_\nu'(x)$ fortschreitende Reihe mit den Koeffizienten a_ν, analog für $F''(x)$ usw. Jedem der vorhergehenden Sätze über Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ steht ein übereinstimmender über Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu'(x), \quad \sum a_\nu P_\nu''(x) \text{ usw.}$$

zur Seite.

Hiermit ist übrigens die Möglichkeit von Polynomenfolgen, die zu derartigen Entwickelungen Anlaß geben, noch lange nicht erschöpft. Bedeutet

$$\mathfrak{P}(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots, \tag{29}$$

eine beliebige für $|\tau| < 1 + \varrho$ konvergierende Potenzreihe, so hätte man z. B. auch

$$\tau \cdot \mathfrak{P}(\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} \tag{30}$$

als erzeugende Funktion gewisser Polynome

$$\Pi_\nu(x) = c_0 P_\nu(x) + c_1 P_{\nu-1}(x) + \cdots + c_{\nu-1} P_1(x) + c_\nu P_0 \tag{31}$$

wählen können, in derselben Weise wie oben $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x}$ die erzeugende Funktion der $P_\nu(x)$ war. Die Polynome $\Pi_\nu(x)$ haben mit den $P_\nu(x)$ viele Eigenschaften gemein und sind insbesondere in gleicher Weise zur Entwickelung analytischer Funktionen in Reihen $F(x) = \sum \alpha_\nu P_\nu(x)$ brauchbar; doch sind hier im allgemeinen die Koeffizienten α_ν nicht eindeutig bestimmt*).

Es scheint hier vielmehr folgender Satz zu bestehen, dessen vollständiger Beweis mir allerdings noch nicht gelungen ist.

Hat $\mathfrak{P}(\tau)$ für $0 < |\tau| < 1 + \varrho$ n Nullstellen mit den absoluten Beträgen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, so gibt es gerade n von einander unabhängige**) Entwickelungen der Null in Reihen $\sum \alpha_\nu \Pi_\nu(x)$, deren Konvergenzgrenzen resp. die Kurven $C_{\omega_1}, C_{\omega_2}, \cdots, C_{\omega_n}$ sind. Im Falle also $\mathfrak{P}(\tau)$ sich auf die Form $\tau^\nu e^{\mathfrak{P}_1(\tau)}$ $(|\tau| < 1 + \varrho)$ bringen läßt, was z. B. für $\mathfrak{P}(\tau) = \frac{1}{\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}}$ zutrifft, wäre auch jetzt die Entwickelung einer Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum \alpha_\nu \Pi_\nu(x)$ nur auf eine Weise möglich.

Endlich behaupte ich

Eine mit willkürlichen Koeffizienten a_ν, die nur der Bedingung

$$\overline{\lim}\, \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < 1 + \varrho$$

*) Man vergleiche damit die Entwickelungen und Sätze des Herrn Frobenius, Crelles Journ. 73 (1871).

**) Definition bei Frobenius a. a. O.

zu genügen haben, angeschriebene Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ *hat die Kurve* C_ω *zur natürlichen Grenze.*

Da die mit willkürlichen Koeffizienten angeschriebene Potenzreihe $\sum a_\nu t^{-\nu}$ stets ihren Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze hat, ist dieser Satz eine unmittelbare Konsequenz des folgenden:

Betrachtet man gleichzeitig die innerhalb C_ω gültige Entwickelung:

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) \tag{32}$$

und die außerhalb K_ω konvergente Potenzreihe:

$$\Phi(t) = \sum a_\nu t^{-\nu} \tag{33}$$

und läßt man durch die Relation $x = \psi(t)$ den Kreis K_ω und die Kurve C_ω einander punktweise entsprechen, *so ist irgend ein Punkt* x_0 *auf* C_ω *dann und nur dann ein singulärer für* $F(x)$, *wenn der ihm entsprechende Punkt* t_0 *ein singulärer für* $\Phi(t)$ *ist.*

Und zwar entspricht einem Pole n^{ter} Ordnung ein ebensolcher, einer wesentlich singulären Stelle wieder eine wesentlich singuläre Stelle und einem Verzweigungspunkte n^{ter} oder unendlich hoher Ordnung wieder ein solcher n^{ter} resp. unendlich hoher Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich wieder durch die Einführung der Variabeln t in $\sum a_\nu P_\nu(x)$ vermöge der Substitution

$$x = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Man erhält (cf. p. 54):

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = -\sum a_\nu t^{-\nu} + \mathfrak{P}_1(t) = -\Phi(t) + \mathfrak{P}_1(t), \tag{34}$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ und $\Phi(t)$ für $|t| > \omega$ konvergiert.

Liegt t_0 auf K_ω und ist $x_0 = \psi(t_0)$, so gilt in einem gewissen Kreise um den Punkt $t = t_0$ die Entwickelung

$$x - x_0 = \alpha_1(t-t_0) + \alpha_2(t-t_0)^2 + \cdots \tag{35}$$

($\alpha_1 \neq 0$, da die Konformität der Abbildung im Bereiche der Kurve C_ω nicht unterbrochen ist).

Da $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ konvergiert, so kann man $\mathfrak{P}_1(t)$ jedenfalls nach Potenzen von $(t-t_0)$ entwickeln (da ja $|t_0| = \omega < 1 + \varrho$): $\mathfrak{P}_1(t) = \mathfrak{P}_1(t|t_0)$. Das gleiche gilt von $\Phi(t)$, wenn der Punkt $t = t_0$ ein regulärer für $\Phi(t)$ ist. Es gilt also in letzterem Falle (s. 34):

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) = \mathfrak{P}_2(t-t_0). \tag{36}$$

Nun läßt sich die Gleichung (35) nach $(t-t_0)$ auflösen, wodurch man erhält:

$$t - t_0 = \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{37}$$

für eine gewisse Umgebung des Punktes $x = x_0$ $\left(\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1} \text{ usw.}\right)$.

Führt man diesen Wert von $t - t_0$ in $\mathfrak{P}_2(t-t_0)$ (36) ein, so erhält man für $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ eine nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$ fortschreitende in einem gewissen Bezirke konvergente Reihe. Man sieht also: $x = x_0$ ist für $F(x)$ ein regulärer Punkt, falls es $t = t_0$ für $\Phi(t)$ ist,

Geht man umgekehrt von der Voraussetzung aus, daß sich $F(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$, also auch von $t - t_0$ entwickeln läßt, so ergibt sich das gleiche von $\Phi(t) = -F(x) + \mathfrak{P}_1(t\,|\,t_0)$.

Demnach sind die Punkte t_0 für $\Phi(t)$ und x_0 für $F(x)$ gleichzeitig regulär oder singulär. Ist ein ganzes Stück des Kreises K_ω regulär oder singulär, so gilt das gleiche von dem entsprechenden Stücke der Kurve C_ω.

Statt wie oben geschehen anzunehmen, daß $\Phi(t)$ sich im Punkte $t = t_0$ regulär verhält, hätte man eine Entwickelung der Form

$$\sum_{-n}^{\infty} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder der Form } \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder eine Reihe } \sum c_\nu(t-t_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{38}$$

voraussetzen können und hätte genau wie oben für $F(x)$ Reihen

$$\sum_{-n}^{\infty} c_\nu'(x-x_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu'(x-x_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum c_\nu'(x-x_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{39}$$

gefunden und umgekehrt. Man schließt daraus, daß nur gleichzeitig $F(x)$ in x_0 und $\Phi(t)$ in t_0 einen Pol oder einen Verzweigungspunkt n^{ter} Ordnung oder eine wesentlich singuläre Stelle haben können.

Falls endlich $t = t_0$ ein isolierter Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung für $\Phi(t)$ ist, so bleibt für $F(x)$ nur das gleiche Verhalten an der Stelle $x = x_0$ übrig. Damit ist der in Rede stehende Satz bewiesen*).

Beispiele. Wir haben Ausdrücke der Form

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau)-x} + \frac{1}{\tau}$$

wo $\psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau)$ ist, nach Potenzen von τ zu entwickeln. Der ein-

*) Es läßt sich noch zeigen, daß wenn $\Phi(t)$ in einem Punkte des Konvergenzkreises K_ω konvergiert, $F(x)$ in dem entsprechenden Punkte C_ω ebenfalls konvergiert und umgekehrt (cf. (13) und (15)). Auch der Abelsche Satz und dessen von Herrn Stolz gegebene Verallgemeinerung über die gleichmäßige Konvergenz bis in die Grenze hinein lassen sich ohne besondere Schwierigkeit übertragen (Abel, Oeuvres I p. 223; Stolz, Schlömilchs Z. 29, p. 127). Ich unterdrücke der Kürze halber diese Beweise.

fachste Fall wäre $\mathfrak{P}(\tau) = \text{const.} = b$ zu setzen; $z = \psi(\tau)$ ist dann eine lineare Funktion von τ und das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene wird auf das Äußere eines Kreises K mit dem Mittelpunkte $x = b$ der x-Ebene konform abgeleitet. Die auf diese Weise sich ergebende polynomische Entwickelung für das Innere von K ist mit der Taylorschen Reihe identisch; es ist nämlich:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} + \frac{1}{\tau} = -\frac{\frac{x-b}{a}}{1 - \tau\frac{x-b}{a}},$$

also

$$P_\nu(x) = -\frac{(x-b)^\nu}{a^\nu}.$$

Betrachtet man dagegen den nächst einfachen Ansatz:

$$z = \psi(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right),$$

so entspricht dem Innern der Kreise $|\tau| = \text{const}\ (<1)$ das Äußere von konfokalen Ellipsen der z-Ebene mit den Brennpunkten $+1$ und -1; setzt man also

$$f(\tau) = \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} + \frac{1}{\tau} = \sum_0^\infty P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu,$$

so läßt sich jede im Inneren einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 reguläre analytische Funktion in eine Reihe $\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln. Diese Polynome $P_\nu(x)$ lassen sich leicht bestimmen. Es ist

$$f(\tau) = \frac{2\tau - 2x}{1 - 2x\tau + \tau^2} = \frac{1}{\tau - (x + \sqrt{x^2-1})} + \frac{1}{\tau - (x - \sqrt{x^2-1})}$$

$$f^{(\nu)}(\tau) = \frac{(-1)^\nu \nu!}{\left(\tau - (x + \sqrt{x^2-1})\right)^{\nu+1}} + \frac{(-1)^\nu \cdot \nu!}{\left(\tau - (x - \sqrt{x^2-1})\right)^{\nu+1}}.$$

$P_\nu(x)$ ist nach Definition gleich $\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}$, also

$$P_\nu(x) = \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2-1})^\nu} + \frac{-1}{(x - \sqrt{x^2-1})^\nu}$$

$$= -\left[(x - \sqrt{x^2-1})^\nu + (x + \sqrt{x^2-1})^\nu\right]^*).$$

*) In der Entwickelung von Funktionen, die in einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 regulär sind, nach diesen Polynomen ist Herr Picard auf anderem Wege gelangt, traité d'an. t. II, pag. 288; cf. auch Heine, Kugelfunktionen, Bd. I, pag. 198.

Setzt man hierin $x = \cos\varphi$, so ist $P_\nu(x) = -2\cos\nu\varphi$; die Gleichung $P_\nu(x) = 0$ hat also ν reelle Wurzeln, die sämtlich zwischen -1 und $+1$ liegen. Die Entwickelung von $P_\nu(x)$ nach Potenzen von x lautet:

für gerades ν: $$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+2}{2}} 2\left(1 + \frac{x^2}{2!}(-\nu^2) + \frac{x^4}{4!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2) + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2)\cdots\overline{(\nu-2^2}-\nu^2)\right),$$

für ungerades ν: $$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+1}{2}} 2\nu\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}(1-\nu^2) + \frac{x^5}{5!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2) + \cdots + \frac{x^\nu}{\nu!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2)\cdots\overline{(\nu-2^2}-\nu^2)\right).$$

Wählt man dagegen als erzeugende Funktion (s. die Bemerkung p. 56):

$$\frac{1}{2\tau}\,\frac{1}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-2\tau x+\tau^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})} - \frac{1}{\tau-(x+\sqrt{x^2-1})}\right) = \sum_0^\infty \Pi_\nu(x)\,\tau^\nu,$$

so erhält man

$$\Pi_\nu(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{\nu+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{\nu+1}\right) = \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wobei wieder $x = \cos\varphi$ gesetzt ist. Die Koeffizienten $\Pi_\nu(x)$ s. bei Schlömilch, Alg. An. p. 245 (2. Aufl.).

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\tau(\psi(\tau)-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\tau x+\tau^2}}$ ist bekanntlich die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome, nach denen man auch Funktionen, die innerhalb einer der obigen konfokalen Ellipsen regulär sind, entwickeln kann. Diese Polynome subsumieren sich zunächst nicht unter die vorausgeschickte allgemeine Theorie. Inwieweit sich dies trotzdem durch Modifikation und Erweiterung dieser Theorie erreichen läßt, möchte ich einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Als letztes Beispiel sollen diejenigen Polynome $P_\nu(x)$ betrachtet werden, die zu Lemniskaten gehören, deren Brennpunkte wieder die Punkte $x = \pm 1$ seien; Die Rolle der Kurve $C_{1+\varrho}$ wird hier von der Lemniskate mit Doppelpunkt übernommen, deren Gleichung lautet:

$$((\xi-1)^2+\eta^2)((\xi+1)^2+\eta^2) = 1.$$

Die Funktion $\psi(\tau)$ ist jetzt die folgende:

(1) $$z = \psi(\tau) = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\tau^2} = \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^3 - + \cdots\right).$$

Die Gleichung (1) nach τ aufgelöst gibt:

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}}; \tag{2}$$

den Kreisen $|\tau| = \text{const.}$ entsprechen also in der z-Ebene Kurven von der Eigenschaft, daß das Produkt der Entfernungen $\overline{1z}$, $-\overline{1z}$ gleich einer Konstanten ist; das sind aber die obigen Lemniskaten.

Wir haben nun folgende Funktion nach Potenzen von τ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau} &= \frac{\dfrac{2\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}-x}{\sqrt{1+\tau^2}-\tau x}\\ &= \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2}-\frac{x}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}}\\ &= 2\sum_1^\infty \tau^\nu x^{\nu-1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}-\sum_0^\infty \tau^\nu x^{\nu+1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}.\end{aligned}$$

Indem man alle hier auftretenden Potenzen von $(1+\tau)^2$ nach der binomischen Reihe entwickelt, und dann die Koeffizienten gleicher Potenzen von τ zusammenfaßt, erhält man:

$$\begin{aligned}P_{2\nu}(x) &= x^{2\nu} + x^{2\nu+2}\left(\binom{-\nu+1}{1}-2\right)+x^{2\nu-4}\left(\binom{-\nu+2}{2}-2\binom{-\nu+1}{1}\right)\\ &\quad + x^{2\nu-6}\left(\binom{-\nu+3}{3}-2\binom{-\nu+2}{2}\right)\\ &\quad + \cdots + x^2\left(\binom{-1}{\nu-1}-2\binom{-2}{\nu-2}\right)-2\binom{-1}{\nu-1}\\ &= x^{2\nu}+\sum_1^\nu (-1)^k\frac{\nu+k}{\nu}\binom{\nu}{k}x^{2\nu-2k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P_{2\nu+1}(x) &= x^{2\nu+1}+x^{2\nu-1}\left(\binom{-2\nu+1}{2}-2\right)+x^{2\nu-3}\left(\binom{-2\nu+3}{2}-2\binom{-2\nu+1}{2}\right)\\ &\quad + x^{2\nu-5}\left(\binom{-2\nu+5}{2}-2\binom{-2\nu+3}{2}\right)\\ &\quad + \cdots + x^3\left(\binom{-3}{2}-2\binom{-5}{2}\right)+x\left(\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}-2\binom{-\frac{3}{2}}{\nu-1}\right)\\ &= x^{2\nu+1}+\sum_1^\nu (-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{2\nu+1}\,\frac{(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots(2\nu-2k+3)}{2^k\cdot k!}\,x^{2\nu+1-2k}.\end{aligned}$$

Zu einfacher gebauten Ausdrücken gelangt man, wenn man von der Bemerkung p. 56 Gebrauch machend als erzeugende Funktion die folgende benutzt:

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-\frac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}} = \sum_0^\infty{}_\nu x^\nu \tau^\nu (1+\tau^2)^{\frac{-\nu}{2}}.$$

Es ergibt sich

$$\Pi_\nu(x) = x^\nu + x^{\nu-2}\binom{\frac{-\nu+2}{2}}{1} + x^{\nu-4}\binom{\frac{-\nu+4}{2}}{2} + \cdots.$$

§ 3.

Bisher spielte der Punkt ∞ als Pol der Polynome eine ausgezeichnete Rolle; durch die Substitution $\frac{1}{z-\alpha}\Big| z$ kann man dieselbe einem beliebigen im Endlichen gelegenen Punkte α zuerteilen; man gelangt so ohne weiteres zu folgender Verallgemeinerung:

C sei eine geschlossene reguläre analytische Kurve auf der Riemannschen Kugelfläche, S eines der beiden Continua, in welche die Kugel durch C geteilt wird, α irgend ein Punkt des andern Continuums; dann läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu P_\nu\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$$

entwickeln.

Ferner besteht folgender Satz:

Wenn das Gebiet S besteht aus der Kugelfläche mit Ausnahme von zwei Continuen S_1 und S_2, die von den regulären analytischen Kurven C_1 und C_2 begrenzt sind, und wenn α_1 ein beliebiger Punkt von S_1, α_2 ein solcher von S_2 ist, so läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion in der Form

$$\sum_\nu a_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{x-\alpha_1}\right) + \sum a_\nu^{(2)} P_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{x-\alpha_2}\right)$$

darstellen. Ein neuer Beweis ist nicht nötig, da nach dem Cauchyschen Satze

$$F(x) = \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-x}\,dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z-x}\,dz,$$

wo die Integrationen so zu nehmen sind, daß das Gebiet S zur linken bleibt; in den beiden Integralen ist nur das Differential $\frac{dz}{z-x}$ ebenso wie oben zu transformieren.

Genau die entsprechende Entwickelung gilt natürlich, wenn das Regularitätsgebiet S von $F(x)$ aus einem n fach zusammenhängenden Continuum besteht.

Eine Erweiterung der Theorie dieses Abschnitts nach einer anderen Richtung hin läßt sich bewerkstelligen, indem man die bisherige wesentliche Voraussetzung fallen läßt, daß die Funktion $\psi(\tau)$ welche das Äußere der gegebenen Kurve C auf das Innere des Einheitskreises abbildet, auf dem letzteren keinen singulären Punkt habe.

Diese Voraussetzung war bisher eine wesentliche. Falls nämlich — um ein ganz extremes Beispiel anzuführen — $\psi(\tau)$ sich nicht über den Einheitskreis festsetzen läßt, während die darzustellende Funktion die Kurve C zur natürlichen Grenze hat, so versagt zwar durchaus nicht die Definition der Polynome $P_\nu(x)$, wohl aber vollständig die durch (23) gegebene Darstellung der a_ν. Es scheint mir nun, daß man durch Kontinuitätsbetrachtungen, indem man $\psi(\tau)$ durch passend gewählte Funktionen approximiert und dann zur Grenze übergeht, auch im allgemeinsten Falle die wichtigsten ausgezeichneten Eigenschaften der Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ beweisen kann.

Doch will ich mit Verzicht auf diese Eigenschaften hier nur zeigen, daß eine Funktion $F(x)$, die in einem von irgend einer stetigen sich selbst nicht schneidenden geschlossenen Kurve C begrenzten Gebiete S sich regulär verhält, in eine Reihe von Polynomen entwickelt werden kann, welche in jedem Gebiete, das ganz innerhalb S liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert.

Man betrachte zu diesem Zwecke eine unendliche Reihe geschlossener Kurven $C_1, C_2, \cdots$ von folgenden Eigenschaften:

1) Jede Kurve C_i besteht aus einem einzigen regulären analytischen Zuge. (Das von C_i begrenzte Gebiet möge S_i heißen.)

2) C_{i+1} verläuft ganz außerhalb C_i.

3) $\lim_{i=\infty} C_i = C$*).

Die in S_i giltige Entwickelung der in S regulären analytischen Funktion $F(x)$ laute:

$$F(x) = \sum_0^\infty{}_\nu a_\nu^{(i)} P_\nu^{(i)}(x)$$

*) Es ist wohl nicht nötig, diese von selbst verständliche Ausdrucksweise durch Anschreiben einiger Ungleichungen zu präzisieren; die Existenz der oben verlangten Kurven C_i läßt sich auf verschiedene Weisen einsehen; man beachte z. B. daß Herr Jordan (cours d'an. I, p. 92ff. (1893)) die Kurve C durch ganz im Innern derselben verlaufende Polygone approximiert; das Innere (oder auch das Äußere) eines solchen Polygons kann nun auf das Innere des Einheitskreises der x'-Ebene abgebildet werden; das Abbild eines Kreises der x'-Ebene mit dem Radius $1 - \varepsilon$ gibt nun, falls ε genügend klein gewählt ist, und auch das Polygon schon nahe genug an der Kurve C verläuft eine Approximation der letzteren von der gewünschten Art.

Ferner sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ irgend eine Folge positiver der Null zustrebender Zahlen; man bestimme $m_1, m_2, \cdots$ so, daß

$$\left| F(x) - \sum_{0}^{m_n} {}_{\nu} a_{\nu}^{(n)} P_{\nu}^{(n)}(x) \right| < \varepsilon_n \tag{1}$$

ist für alle x innerhalb S_{n-1}. Es sei

$$H_n(x) = \sum_{0}^{m_n} {}_{\nu} a_{\nu}^{(n)} P_{\nu}^{(n)}(x) \tag{2}$$

und

$$\begin{aligned} G_1(x) &= H_1(x), \\ G_n(x) &= H_n(x) - H_{n-1}(x) \qquad (n>1); \end{aligned} \tag{3}$$

$G_n(x)$ ist ein Polynom m_n^{ten} Grades in x und

$$\sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} G_{\nu}(x) \tag{4}$$

ist eine in jedem Gebiete, das ganz innerhalb C liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergente Reihe. Denn

$$\left| F(x) - \sum_{1}^{n} {}_{\nu} G_{\nu}(x) \right| = |F(x) - H_n(x)| < \varepsilon_n \quad \text{(nach (1))} \tag{5}$$

für alle x in S_{n-1}; durch Wahl von n kann aber sowohl erreicht werden, daß ε_n beliebig klein wird, als daß sich S_{n-1} von S beliebig wenig unterscheidet.

Noch eine kleine Modifikation möge angebracht werden: von den drei Bedingungen, denen die Kurven C_i zu genügen haben, möge die dritte dahin abgeändert werden, daß $\lim C_i = L$ wird. L bedeutet dabei auf der Riemannschen Kugel das Stück $(1, \infty)$ der positiven reellen Achse; die Kurven C_i kann man sich als sphärische Ellipsen mit den Brennpunkten 1 und ∞ auf der Riemannschen Kugel denken.

Man sieht auf diese Weise ein, daß jede auf der längs L aufgeschnittenen Kugel reguläre analytische Funktion $F(x)$ sich in eine Reihe von Polynomen

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} {}_{\nu} G_{\nu}(x)$$

entwickeln läßt, die in jedem endlichen Gebiete, dessen Begrenzung keinen

Punkt mit L gemein hat, gleichmäßig konvergiert. Speziell möge für $F(x)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ gewählt werden:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty {}_\nu G_\nu(x), \tag{6}$$

wo

$$G_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu \gamma_\nu^{(n)} x^\nu. \tag{7}$$

Von dieser polynomischen Entwickelung von $\frac{1}{1-x}$ ist, wie Herr Borel*) gezeigt hat, nur noch ein Schritt zu folgendem Theoreme des Herrn Mittag-Leffler**):

Von jedem singulären Punkte α der durch die Taylorsche Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots$$

definierten Funktion $F(x)$ möge der geradlinige Schnitt L_α, dessen Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde, ins Unendliche geführt werden; das so entstehende Continuum heißt der zu $F(x)$ gehörige Stern. Der Satz des Herrn Mittag-Leffler behauptet nun:

$F(x)$ kann in dem Sterne dargestellt werden durch die polynomische Entwickelung

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu g_\nu(x), \tag{8}$$

die in jedem endlichen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergiert, und zwar ist

$$g_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu. \tag{9}$$

(Die γ sind die gleichen wie in (7), also von den a_ν und α völlig unabhängig.)

Beweis nach Herrn Borel (a. a. O.): Nach (7) gilt, solange $y = \frac{x}{z}$ auf ein endliches ganz außerhalb der reellen Achse $1 - \infty$ der y-Ebene gelegenes Gebiet beschränkt bleibt,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_0^\infty {}_\nu G_\nu\left(\frac{x}{z}\right). \tag{10}$$

---

*) Ann. éc. norm. 10 (1899).

**) acta math. 23 (1899).

Die Voraussetzung über $\frac{x}{z}$ ist bei festem z mit der folgenden identisch:

(11) x muß auf ein endliches Gebiet beschränkt bleiben, dem kein Punkt der Geraden L_z angehört (auch nicht als Begrenzung).

Ist z nicht fest, so muß diese Bedingung für alle in Betracht kommenden L_z erfüllt sein.

Ist nun innerhalb des obigen Sterns eine geschlossene Kurve C gelegen, die das Gebiet S begrenzt, so soll für S die gleichmäßige Konvergenz der Entwickelung (8) bewiesen werden. Man denke sich zu dem Zwecke eine ganz außerhalb S, aber noch ganz innerhalb des Sterns verlaufende geschlossene den Nullpunkt umschließende Kurve C_2 gezogen, sodaß die Verlängerungen der vom Nullpunkte nach den Punkten der C_2 gezogenen radii vectores über C_2 hinaus ganz außerhalb S verlaufen. Dann trifft die Bedingung (11) für alle z auf C_2 und alle x in S zu und es besteht für $n \geqq n'$ und für alle diese x und z die Ungleichung:

$$\left| \frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n{}_\nu G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Nun ist aber nach dem Cauchyschen Satze:

$$F(x) = \int_{C_2} \frac{1}{1-\frac{x}{z}} \frac{F(z)}{z}\, dz. \tag{13}$$

Hier setzt man für $\frac{1}{1-\frac{x}{z}}$ die Reihe (10) ein und erhält:

$$F(x) = \sum_1^n{}_\nu \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n{}_\nu G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right) dz. \tag{14}$$

Das Maximum von $\left|\frac{F(z)}{z}\right|$ auf C_2 sei G, die Bogenlänge von C_2 sei L, dann ist nach (12) für $n \geqq n'$:

$$\left| F(x) - \sum_1^n{}_\nu \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz \right| < \varepsilon \int_{C_2} \left|\frac{F(z)}{z}\right| |dz| < \varepsilon \cdot G \cdot L \tag{15}$$

gleichmäßig für alle x in S. Beachtet man noch, daß

$$\int_{C_2} \frac{F(z)}{z^{m+1}}\, dz = a_m, \tag{16}$$

und setzt diesen Wert in (15) ein, so hat man die oben behauptete in S, d. i. in einem beliebigen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergente Entwickelung:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} g_\nu(x),$$

wo

$$g_n(x) = \sum_{1}^{m_n}{}_{\nu} \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu.$$

Lebenslauf.

Am 5. April 1877 zu Kaiserslautern geboren, besuchte ich die Volksschule und das Gymnasium meiner Vaterstadt und erhielt Ostern 1896 zu Birkenfeld das Zeugnis der Reife. Darauf studierte ich vier Jahre an der Universität München Mathematik, Physik und Astronomie und unterzog mich daselbst den beiden Abschnitten der Lehramtsprüfung.

Ein weiteres Studienjahr verbrachte ich an der Universität Göttingen, worauf ich von November 1901 an Assistent des Herrn Professor FINSTERWALDER an der technischen Hochschule München wurde.

Allen meinen verehrten Münchner und Göttinger Lehrern sage ich an dieser Stelle herzlichen Dank; besonders verpflichtet fühle ich mich den Herren Professoren PRINGSHEIM und SEELIGER in München und Herrn Professor HILBERT in Göttingen.